LO QUE NO SE ENSEÑA DE

MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Y DEBERÍAS SABER

Primera edición: diciembre, 2017
Revisada a febrero de 2019

Todos los derechos reservados
Autor: Daniel Arnaiz Boluda

© Daniel Arnaiz Boluda, 2017
Edita: CFE
Calle Comunidad de Madrid 37, 179
Las Rozas, España
ISBN: 978-1981821372

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio o en cualquier soporte sin consentimiento expreso del propietario del *copyright* y sin la correspondiente cita.

A todos aquéllos que sin ánimo de prejuzgar valoren el esfuerzo invertido, lo aprovechen y lo mejoren.

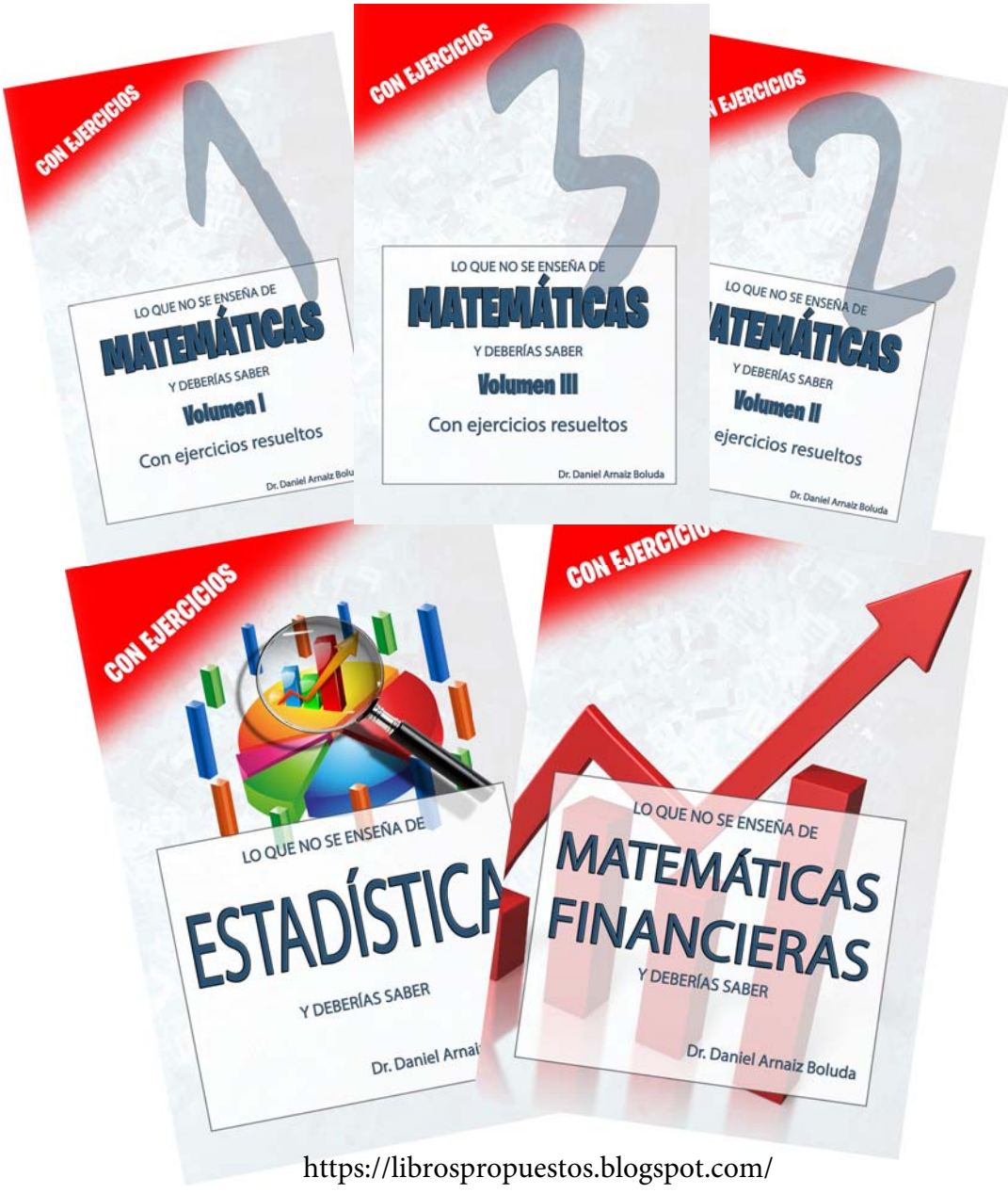
Y especialmente a mi padre, que ha despertado en mí el interés de no obviar nada y sin cuyos consejos este libro no existiría.

Serie

Lo que no se enseña de Matemáticas y deberías saber

En formato Kindle, y pasta blanda
Disponibles en Amazon

En constante ampliación y desarrollo



https://librospropuestos.blogspot.com/

ÍNDICE DE LECCIONES

PRÓLOGO 7

I. CAPITALIZACIÓN Y DESCUENTO 9
1.1. INTRODUCCIÓN 9
1.2. CAPITALIZACIÓN 9
1.3. CAPITALIZACIÓN SIMPLE 10
1.4. CAPITALIZACIÓN COMPUESTA 16
1.5. TANTOS EQUIVALENTES 25
1.6. TASA ANUAL EQUIVALENTE (TAE) 28
1.7. LEY DE DESCUENTO SIMPLE COMERCIAL 29
1.8. LEY DE DESCUENTO COMPUESTO COMERCIAL 31
1.9. DESCUENTO RACIONAL 32
1.10. EJERCICIOS RESUELTOS 33

II. RENTAS 53
2.1. INTRODUCCIÓN 53
2.2. TIPOS DE RENTAS 56
2.3. EJERCICIOS RESUELTOS 80

III. PRÉSTAMOS 93
3.1. CUADRO DE AMORTIZACIÓN 93
3.2. PRÉSTAMO SIMPLE 95
3.3. PRÉSTAMO AMERICANO 97
3.4. PRÉSTAMO LINEAL 99
3.5. PRÉSTAMO FRANCÉS 101
3.6. EJERCICIOS RESUELTOS 113

IV. MÉTODOS DE VALORACIÓN DE INVERSIONES 129
4.1. INTRODUCCIÓN 129
4.2. MÉTODOS ESTÁTICOS 130
4.3. MÉTODOS DINÁMICOS 132
4.4. EJERCICIOS RESUELTOS 134

PRÓLOGO

Este libro tiene su origen en la deficiencia apreciada en la comprensión de las fórmulas y planteamientos de los problemas de las matemáticas financieras, así como en el desinterés generalizado en el verdadero aprendizaje del alumno por parte del profesor.

No es de agrado observar cómo algunos docentes deciden tomar el camino fácil en la enseñanza olvidándose de su verdadera misión consistente en la transmisión de sus conocimientos al alumno, de lo que se puede concluir dos cosas alternativas: el docente está incumpliendo con su obligación educativa o no tiene los conocimientos necesarios.

Una clase no puede consistir en facilitar las fórmulas para que los alumnos se las aprendan de memoria sin comprenderlas y en resolver de forma continuada problemas de distinto tipo. Las matemáticas no consisten en práctica, en resolver distintos tipos de ejercicios, pues todo tiene su justificación, su razonamiento lógico, su origen.

La diferencia entre enseñar las matemáticas financieras con los correspondientes razonamientos lógicos desde su origen frente a impartirlas con la resolución de sucesivos problemas planteados es que, en el segundo caso, a poco que se cambie el planteamiento de un problema el alumno quedará perdido sin posibilidad de comprender lo que se le está preguntando aun a pesar de las horas de estudio que le haya dedicado resolviendo otro tipo de problemas. Ello propiciará que acabe odiando las matemáticas en general y que la asignatura y tiempo invertido en la asignatura sean improductivos, olvidándose los pocos conocimientos adquiridos en unos días.

Sin embargo, si se enseñara la asignatura convenientemente, ayudando al alumno a comprender el por qué de las cosas, el razonamiento de las fórmulas, la lógica de esta rama matemática, lo que se podría ampliar a las matemáticas en general, el alumno tendrá la capacidad de comprender la materia, resolver cualquier tipo de problema planteado y, en un futuro, poder recordarla con mayor facilidad.

Este libro tiene como fin enseñar a todos aquéllos que tengan el interés la metodología de estudio requerida para esta asignatura, no pasando por alto ni obviando nada, tras una alta experiencia y análisis de la misma con diferentes alumnos.

En una primera edición a diciembre de 2017 se expondrá únicamente el razonamiento lógico de las fórmulas, facilitando su comprensión al lector interesado.

En una revisión de la primera edición a febrero de 2019 se ha añadido varios ejercicios de distinto tipo, resueltos y explicados.

En posteriores ediciones, se irá ampliando el texto con más ejemplos de problemas resueltos así como con las correcciones y recomendaciones de los lectores.

I

CAPITALIZACIÓN Y DESCUENTO

1.1. Introducción

La clase típica en la que se comienza con esta materia consiste en dar una definición de capitalización simple y diferenciarla de la compuesta. Posteriormente se copian en la pizarra las fórmulas correspondientes a cada tipo y se comienzan a plantear los problemas.

En un primer momento cabría pensar que no es importante al omisión del razonamiento lógico pues se tratan de dos fórmulas muy sencillas de fácil memorización. Pero este pensamiento se desvanece cuando los problemas comienzan a plantearse.

Comencemos la enseñanza.

En este tema se estudiará la evolución de los capitales, inversiones y del dinero en general a lo largo del tiempo. Es bien sabido que el valor del dinero no es el mismo hoy que mañana. Existen una serie de factores que influyen sobre el mismo de igual manera que la inflación afecta al valor de los productos ofertados y servicios prestados en el mercado.

En el caso del dinero, el factor que determina su evolución no es la inflación (aunque indirectamente sí influye en el poder adquisitivo de los agentes económicos, como los consumidores, pues una inflación alta se debe a un crecimiento importante de los precios y, a una misma renta de los hogares, su capacidad de compra caerá), sino el tipo de interés.

En la práctica, este tipo de interés cambia de forma constante y se puede definir como el precio que pagan al depositario o prestamista por el dinero que deposita o presta.

La cuantía depositada o prestada la denominamos como capital.

1.2. Capitalización

La capitalización consiste en obtener un capital en un momento futuro determinado conociendo el capital con el que se cuenta en el momento presente, y dicha evolución dependerá del tipo de interés.

Así, si en el momento actual se cuenta con un capital C_0 y se decide

acudir a una entidad financiera para depositarlo en un depósito a plazo por un periodo de tiempo cualquiera, el banco nos informará del tipo de interés que nos ofrecen, es decir, cuánto están dispuestos a pagarnos por depositar esa cuantía C_0. Ese tipo de interés *i* es el que determinará el valor de C_0 en el futuro.

Sin embargo, existen dos formas diferentes de calcular ese valor futuro en función del sistema de capitalización.

El primero es el denominado *capitalización simple*, consistente en calcular el capital al final de un periodo compuesto por el capital inicial más los intereses generados. Sin embargo, y aquí radica la diferencia con la *capitalización compuesta*, los intereses generados en periodos anteriores no generan más intereses, mientras que en la compuesta sí que generan más intereses, lo que producirá un capital final más elevado.

A partir de ambas definiciones se obtienen unas fórmulas que permiten resolver cualquier problema. La diferencia entre saber el por qué y el origen de esas fórmulas radica en el entendimiento del planteamiento de dicho problema, lo que puede ayudar a estructurar la cabeza y entender muchos asuntos de la vida cotidiana.

Que no se preocupe el lector si no entiende a lo que me refiero. Espero que tras la lectura de los epígrafes posteriores lo haga.

1.3. Capitalización simple

En este punto, la evolución normal de la clase consiste en definir la capitalización simple como la forma de capitalizar una cuantía en el tiempo a un interés determinado en el que los intereses generados no generan más intereses. Se copia la siguiente fórmula en la pizarra y a empezar a hacer problemas:

$$C_n = C_0(1 + in)$$

Pero ésta no es la forma adecuada.

Comencemos por definir correctamente la capitalización simple.

El sistema de capitalización simple consiste en calcular el valor futuro de un capital inicial C_0, que es el capital con el que se cuenta en el momento actual, a un tipo de interés *i* concreto.

Durante ese periodo existirán varios pagos correspondientes al depósito o préstamo realizado de esa cuantía C_0, y todos esos pagos se corresponden con la generación de intereses en función del C_0 y del *i*, de tal forma que su cuantía será la parte proporcional entre ambos valores.

Por ejemplo, en cualquier depósito en el que se han ingresado X unidades monetarias pagarán mensualmente unos intereses determinados. Así:

$$C_0 i = I$$

La diferencia entre i e I es que el primero es un término porcentual, lo que implica una proporción sobre C_0, mientras que el segundo es una cuantía en términos absolutos, es decir, los intereses generados en el periodo en unidades monetarias.

Pues bien, durante esos periodos en los que se han generado intereses, el depositante o prestamista recibirá los intereses I. Sin embargo, por el sistema de capitalización simple, dichos intereses no serán remuneratorios, es decir, no generarán nuevos intereses. ¿Por qué? Por pura definición, porque así se ha acordado que será el sistema de capitalización simple.

Lo que no es mera definición es la fórmula facilitada al comienzo de este epígrafe, la cuál debe ser razonada convenientemente.

Trataré de explicarlo siguiendo la metodología presencial. Así, partamos de la situación inicial, el momento en el que se cuenta con un capital C_0 que se deposita en una cuenta a un determinado interés. La representación gráfica será:

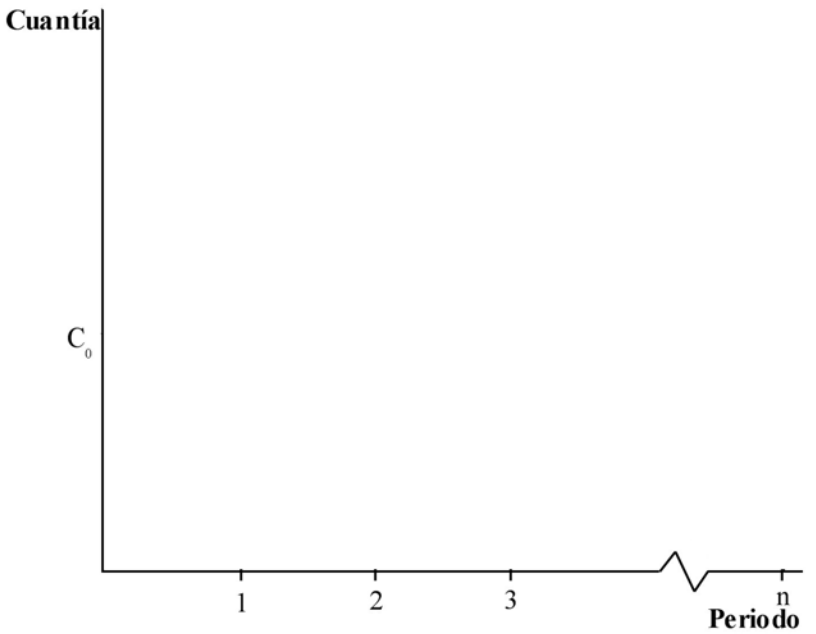


Figura 1.ª Capitalización simple al comienzo del primer periodo.

Puesto que nos encontramos en el momento inicial, no ha habido oportunidad de generar ningún interés. A partir de este momento, debe tenerse en cuenta que, por el capital depositado se pagará un interés concreto resultante de aplicar el tipo *i* al C_0.

Gráficamente quedará como se muestra a continuación:

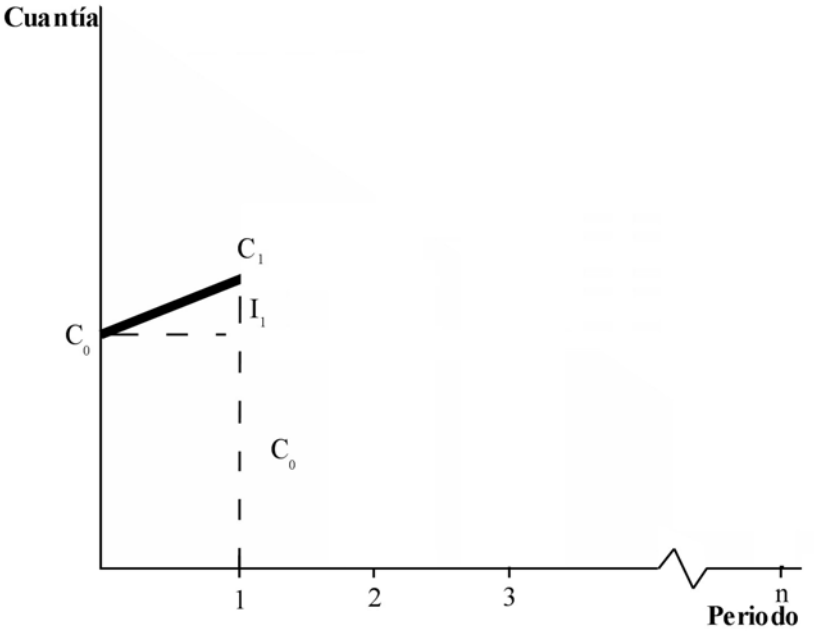


Figura 2.ª Capitalización simple. Final del primer periodo.

De esta forma, tendremos que tras el transcurso del primer periodo, en el momento *1*, que definiremos como *n=1*, el montante final estará compuesto por el C_0 más los intereses generados *I* resultantes del cálculo proporcional del tipo de interés *i*, es decir:

$$C_1 = C_0 + C_0 i$$

O, lo que es lo mismo:

$$C_1 = C_0 + I_1$$

Continuemos con el segundo año, y aquí debe prestarse especial atención, pues es a partir del momento en el que surgirán diferencias frente a la capitalización compuesta.

Al final del segundo periodo, puesto que se parte del periodo *n=1*, es

importante recordar la definición de capitalización simple, es decir, los intereses generados en periodos anteriores no generan más intereses.

Cor ello, los intereses que se generan durante el segundo periodo toman como base el C_0, lo mismo que ocurría durante el primer periodo.

De esta forma ocurre que los intereses en términos absolutos generados durante los periodos primero y segundo serán los mismos:

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= C_0 i \\ I_2 &= C_0 i \end{aligned}\right\} \rightarrow I_1 = I_2$$

Con ello, la representación gráfica será creciente con la misma pendiente que en el periodo anterior, observándose como una línea recta, ya que el aumento del capital final total será exactamente el mismo que en el primer periodo:

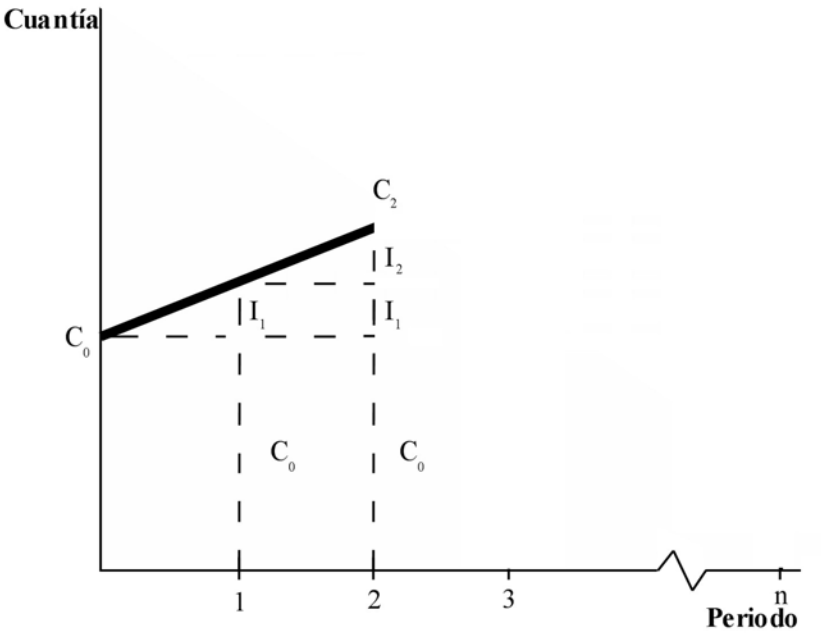


Figura 3.ª Capitalización simple. Final del segundo periodo.

De esta forma, el capital al final del segundo periodo será:

$$C_2 = C_0 + I_1 + I_2$$

El lector puede apreciar que el capital C_2 que se observa en la gráfica

anterior es la suma de todos los valores que se encuentran debajo de su punto, es decir, la suma de C_0, I_1 e I_2.

Recordando cómo se calculan los intereses en términos absolutos, es decir, el C_0 por el tipo de interés i, obtenemos:

$$I_1 = C_0 i$$

$$I_2 = C_0 i$$

$$C_2 = C_0 + C_0 i + C_0 i$$

Durante el tercer periodo ocurre lo mismo que en los dos anteriores, es decir, por la propia definición de capitalización simple, los intereses generados durante este periodo, así como en todos los posteriores, será siempre sobre el capital inicial C_0, de tal forma que:

$$I_3 = C_0 i$$

De esta forma, el capital al final del tercer periodo será el capital inicial C_0 más los intereses generados en los tres primeros periodos que resultan ser iguales. Gráficamente:

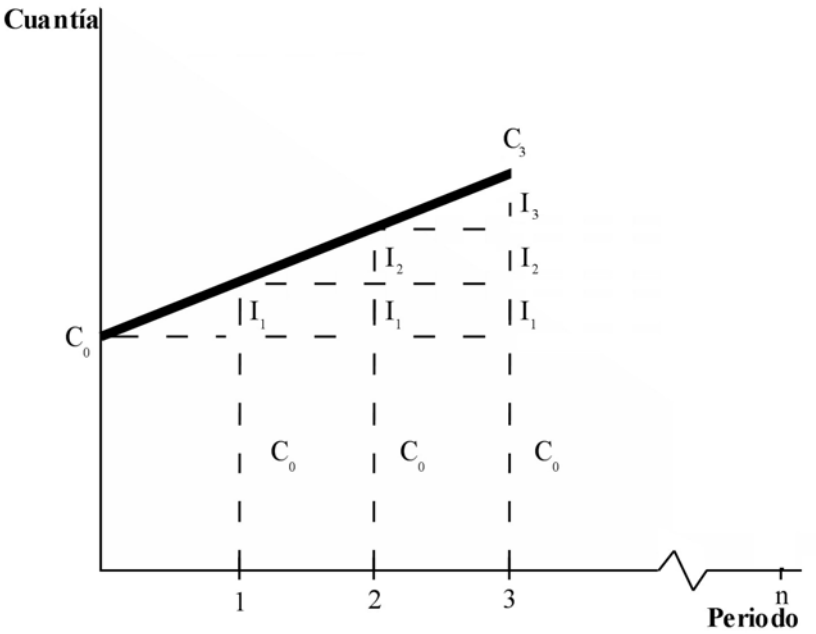


Figura 4.ª Capitalización simple. Final del tercer periodo.

Con todo ello, la fórmula será la siguiente:

$$C_3 = C_0 + C_0 i + C_0 i + C_0 i$$

Para el caso de que nos encontráramos con un número indeterminado de periodos la situación es exactamente la misma, sólo que los intereses generados al final del periodo será *n* veces.

De esta forma, el cálculo será:

$$C_n = C_0 + C_0 i + C_0 i + C_0 i \overset{hasta\ periodo \rightarrow n}{\underset{\ldots}{}} C_0 i$$

Soy consciente de que esta generalización puede acarrear problemas al lector para poder visualizar la constante. Por ello, en caso de que la ecuación anterior suponga un problema para el lector, no abandones la lectura y le invito a que acuda a la ecuación inmediatamente anterior por la que se establece la igualdad de C_3, pues el resultado es el mismo.

Continuando en la ecuación general por la que se define el cálculo de C_n,, la representación gráfica será:

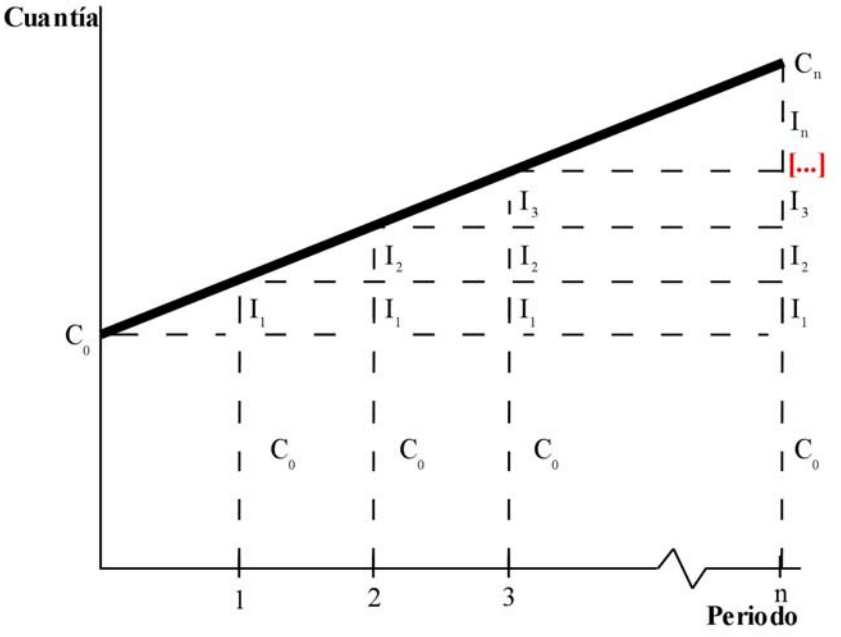


Figura 5.ª Capitalización simple. Final del último periodo.

Nuevamente, obsérvese que todos los importes de los intereses y el capital inicial que se encuentran debajo de C_n son los que constituyen la igualdad de la ecuación:

$$C_n = C_0 + C_0 i + C_0 i + C_0 i \overset{hasta\ periodo \rightarrow n}{\underset{\dots}{\quad}} C_0 i$$

Se puede observar aquí factor común, que es el capital inicial C_0:

$$C_n = C_0 \left(1 + i + i + i \overset{"n"\ veces}{\underset{\dots}{\quad}} + i \right)$$

Si se observa la operación que se encuentra en el interior del paréntesis el tipo de interés *i* está sumando repetidamente y, según los pasos previos suma tantas veces como periodos han habido. En este caso que nos encontramos analizando un número indeterminado de periodos será *n* veces. En el caso anterior en que habían tres periodos, *i* sumará tres veces. En cualquier caso, la operación se puede reducir según la definición de multiplicación:

$$i + i + i = 3i$$

$$i + i + i + \overset{"n"\ veces}{\underset{\dots}{\quad}} = ni$$

Así, la operación final se puede simplificar a:

$$C_n = C_0 (1 + in)$$

Y ésta es la fórmula de la que se ha partido al comienzo de este epígrafe.

1.4. Capitalización compuesta

Al contrario que en el sistema de capitalización simple anterior, en el sistema compuesto los intereses que se han generado en periodos anteriores sí que generan más intereses. Esta definición provocará que en el primer periodo el capital final sea siempre el mismo que si se capitalizara por el sistema simple, pues la base sobre la que se aplica el tipo de interés es el mismo, C_0.

Sin embargo, en los periodos consecutivos ya no ocurre lo mismo, ya que en capitalización compuesta se tomará como base el capital final existente en el periodo inmediatamente anterior a aquél que se está capitalizando.

Veámoslo.

En el primer periodo se parte del capital inicial invertido C_0 al tipo de interés acordado i, que será un porcentaje sobre el capital. Así, en el primer periodo se tiene gráficamente siguiendo con el mismo esquema del epígrafe anterior:

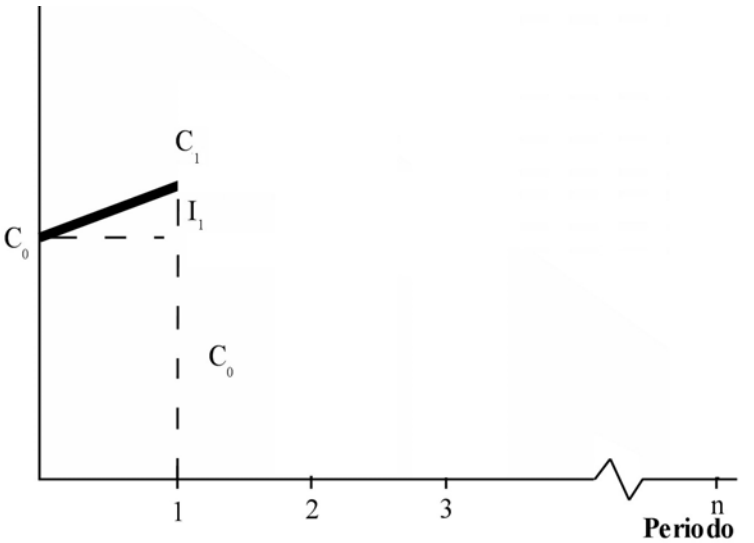


Figura 6.ª Capitalización compuesta. Final del primer periodo.

Puede observarse que el esquema es igual que en el primer periodo de la capitalización simple (Figura 3), es decir, se contaba al comienzo del periodo con un capital determinado C_0 sobre el que se aplica el tipo de interés i, obteniéndose los intereses totales generados I:

$$I_1 = C_0 i$$

Por lo que el capital al final del primer periodo será:

$$C_1 = C_0 + I_1$$

Es decir:

$$C_1 = C_0 + C_0 i$$

En el segundo año la situación cambia. Veamos la gráfica inicial:

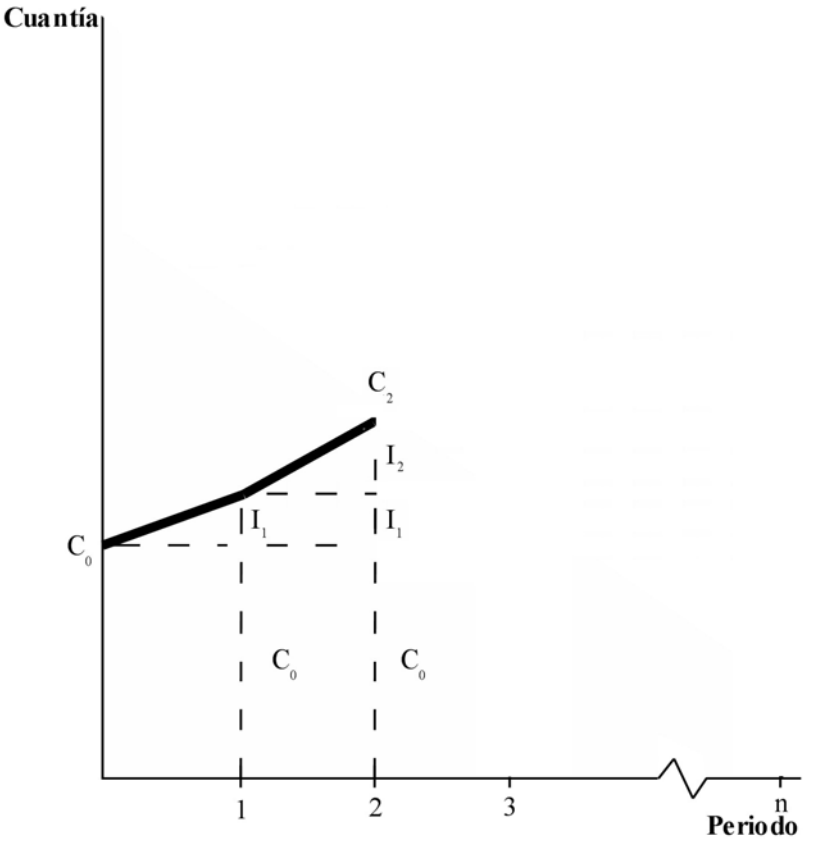


Figura 7.ª Capitalización compuesta. Final del segundo periodo según C_0.

¿Son los intereses generados durante el segundo año los mismos que durante el primero? Puede observarse que no, pues son mayores, es decir:

$$I_1 < I_2$$

¿Por qué sucede esto? Simplemente porque para el cálculo de los intereses totales I_2 se ha tomado en cuenta como base el capital existente en el primer año, es decir, C_1 calculado anteriormente.

La representación gráfica se entenderá mejor de la siguiente forma:

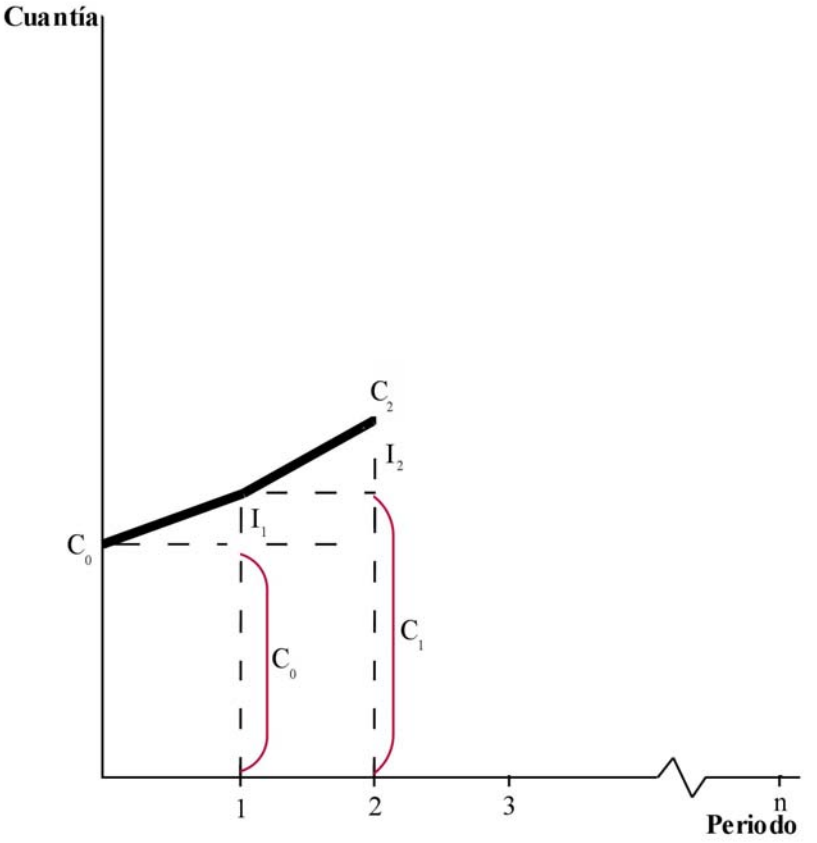


Figura 8.ª Capitalización compuesta. Final del segundo periodo según la base para el cálculo de los intereses generados durante el mismo.

Con ello, para el cálculo de los intereses del segundo año, la operación será:

$$C_2 = C_1 + I_2$$

$$C_2 = C_1 + C_1 i$$

Teniendo en cuenta el valor ce C_1 calculado anteriormente, tendremos:

$$C_2 = \left(C_0 + C_0 i\right) + \left(C_0 + C_0 i\right) i$$

Lo mismo ocurre con los intereses generados en el tercer periodo I_3. Podrá apreciarse en la siguiente gráfica que su cuantía es mayor a los del periodo anterior que, a su vez son mayores a los del primero:

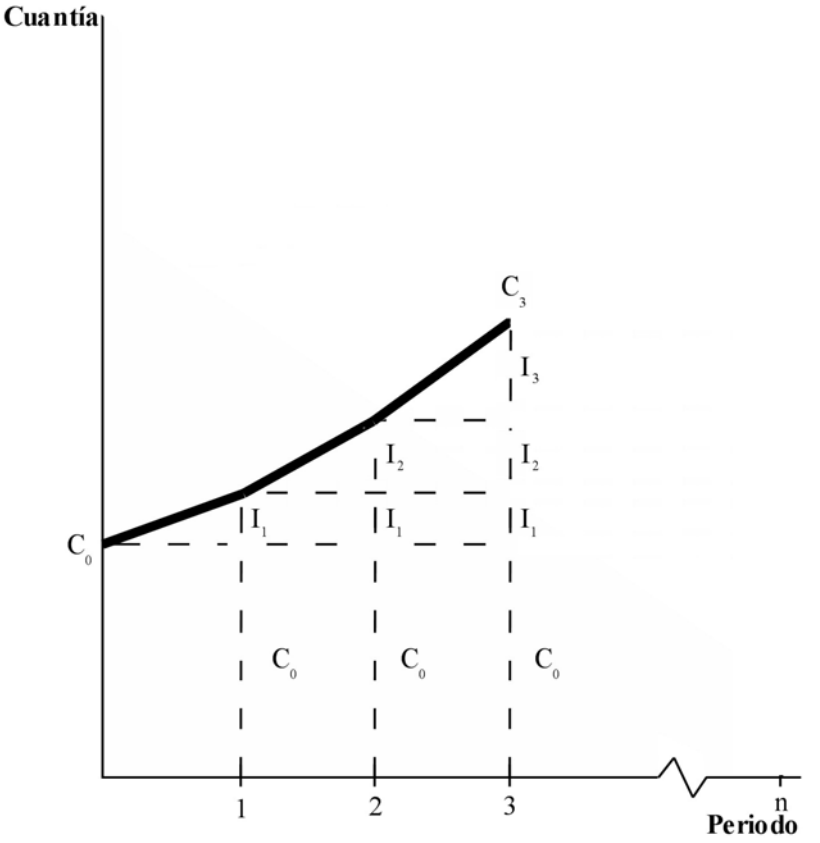


Figura 9.ª Capitalización compuesta. Final del tercer periodo en función de C_0.

La cuantía de los intereses en términos absolutos generados durante el tercer periodo es mayor a la de los dos periodos anteriores ya que, el capital que se toma como base tiene en cuenta los intereses generados en los periodos anteriores. Es decir, no se tomará como base C_0 sino C_2, cuyo valor se ha calculado anteriormente.

En la gráfica siguiente se puede observar con mejor detalle.

De esta forma, para el cálculo de los intereses del tercer periodo:

$$I_3 = C_2 i$$

Con lo que:

$$C_3 = C_2 + C_2 i$$

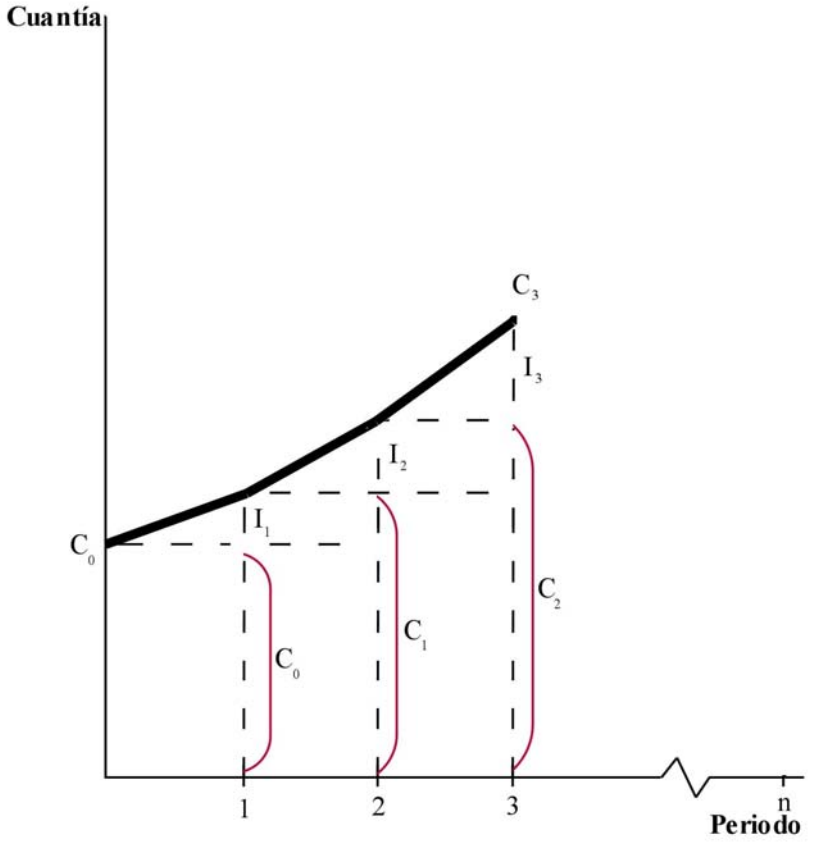


Figura 10.ª Capitalización compuesta. Final del tercer periodo según la base para el cálculo de los intereses generados durante el mismo.

Sabiendo lo que vale C_2 calculado anteriormente, obtenemos:

$$C_3 = C_0 + C_0 i + \left(C_0 + C_0 i\right)i + \left[\left(C_0 + C_0 i\right) + \left(C_0 + C_0 i\right)i\right]i$$

Nuevamente, puede observarse una constante que nos ayudará a conocer el capital final para un número cualquiera de periodos. Así, operando esta ecuación:

$$C_3 = C_0 + C_0 i + C_0 i + C_0 ii + C_0 i + C_0 ii + C_0 ii + C_0 iii$$

Operando:

$$C_3 = C_0 + 3C_0 i + 3C_0 ii + C_0 iii$$

Es decir:

$$C_3 = C_0 + 3C_0 i + 3C_0 i^2 + C_0 i^3$$

Existiendo factor común del capital inicial C_0:

$$C_3 = C_0\left(1 + 3i + 3i^2 + i^3\right)$$

La ecuación existente dentro del paréntesis se puede descomponer quedando:

$$i^3 + 3^2 + 3i + 1 = \left(1+i\right)\left(1+i\right)\left(1+i\right)$$

Es decir:

$$\left(1+i\right)\left(1+i\right)\left(1+i\right) = \left(1+i\right)^3$$

Obteniéndose, finalmente, la fórmula:

$$C_3 = C_0\left(1+i\right)^3$$

Para concluir, para cualquier número de periodos, el razonamiento es exactamente el mismo.

Partiendo de la situación, que gráficamente sería como se representa a continuación, los intereses generados se aplican sobre la base del capital final del periodo inmediatamente anterior *n-1*, lo que es la suma del capital inicial más los respectivos intereses de cada periodo.

Lo anterior supone que los nuevos intereses que se generan en periodos posteriores es sobre el capital final del periodo inmediatamente anterior, que será la suma del capital del periodo respectivamente anterior más los intereses generados durante el periodo posterior.

En resumen, en el primer periodo los intereses generados serán sobre el capital inicial, y el capital final será la suma de dicho capital inicial más los intereses. Este capital final se tomará para calcular los nuevos intereses del segundo periodo, por lo que el mismo capital final del periodo primero será el capital inicial del segundo periodo.

Es por ello por lo que la curva de la figura siguiente aumenta de pendiente con cada periodo, pues el capital inicial que se toma para calcular los intereses es cada vez mayor, por lo que proporcionalmente los intereses generados también crecen.

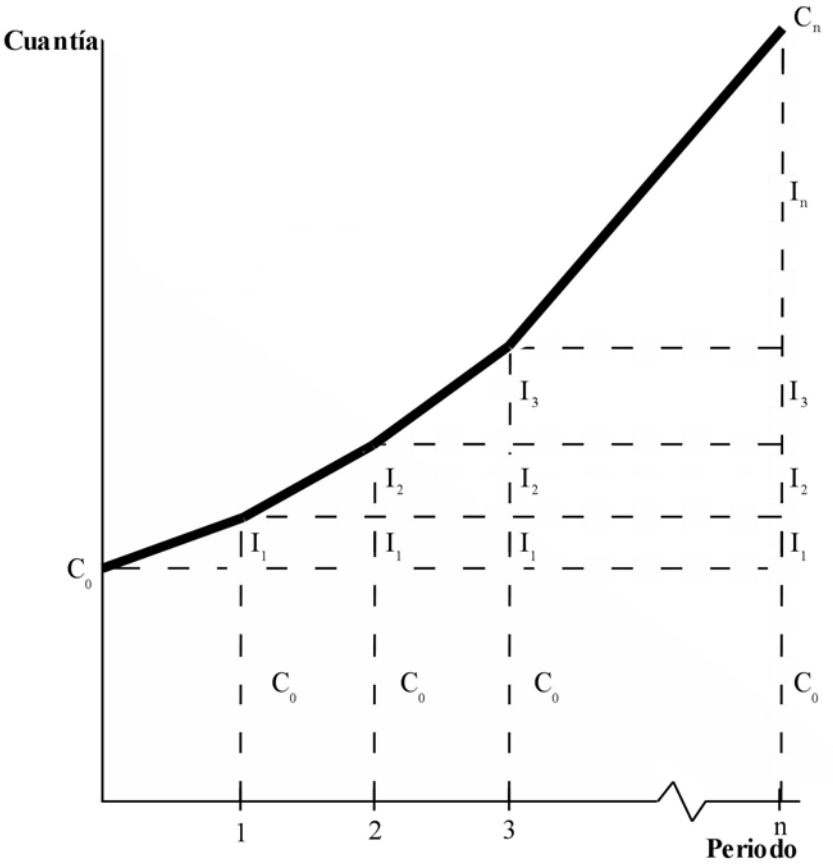


Figura 11.ª Capitalización compuesta. Último periodo en función de C_0.

Al igual que en los casos anteriores, puesto que el capital sobre el que se toma la base al aplicar el tipo de interés incluye los intereses de los años anteriores, la cuantía en términos absolutos de dichos intereses I_n será mayor al anterior I_{n-1} y a todos. Debe tenerse en cuenta que, según la gráfica mostrada el capital que genera los intereses está formado por C_0, I_1, I_2 e I_3 como puede observarse en la siguiente gráfica.

Con todo ello, tendremos:

$$C_n = C_{n-1} + I_n$$

Sabemos cuánto vale I_n:

$$I_n = C_{n-1} i$$

Y también se conoce el valor de C_{n-1}:

$$C_{n-1} = C_{n-2} + C_{n-2}i$$

De esta forma, se obtiene que:

$$C_n = C_{n-2} + C_{n-2}i + \left(C_{n-2} + C_{n-2}i\right)i$$

De lo cual, sacando factor común:

$$C_n = \left(C_{n-2} + C_{n-2}i\right)\left(1+i\right)$$

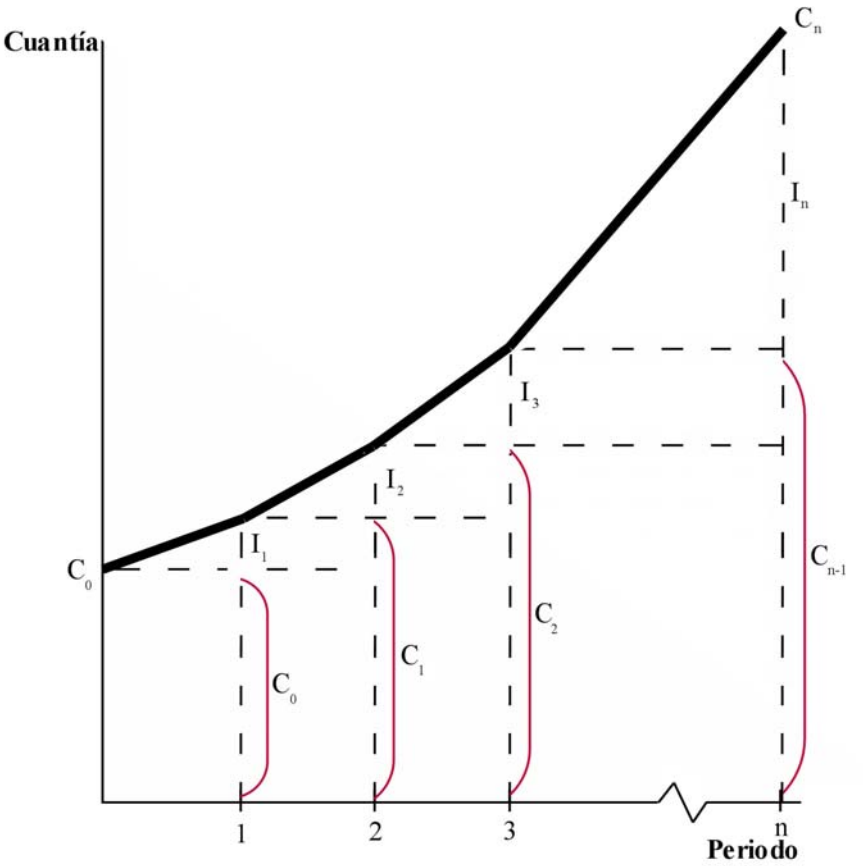


Figura 12.ª Capitalización compuesta. Final del último periodo según la base para el cálculo de los intereses generados durante el mismo.

En resumen, se sabe que:

$$I_1 = C_0 i$$

$$C_1 = C_0 + I_1 = C_0 + C_0 i = C_0\left(1+i\right)$$

Continuando con el razonamiento:

$$I_2 = C_1 i = C_0(1+i)i$$

$$C_2 = C_1 + I_2 = C_0(1+i) + C_0(1+i)i$$

Sacando factor común de $C_0(1+i)$, se obtiene:

$$C_0(1+i)(1+i) = C_0(1+i)^2$$

De igual forma:

$$I_3 = C_2 i = C_0(1+i)^2 i$$

$$C_3 = C_2 + I_3 = C_0(1+i)^2 + C_0(1+i)^2 i$$

Nuevamente, sacando factor común de $C_0(1+i)^2$:

$$C_3 = C_0(1+i)^2(1+i) = C_0(1+i)^3$$

D esta misma forma, se obtiene la fórmula general que el profesor suele escribir en la pizarra para que el alumno se la aprenda de memoria sin ningún tipo de razonamiento:

$$C_n = C_0(1+i)^n$$

El razonamiento final es el siguiente:

$$I_n = C_{n-1} i$$

$$C_n = C_{n-1} + I_n = C_0(1+i)^{n-1} + C_0(1+i)^{n-1} i$$

Sacando factor común de $C_0(1+i)^{n-1}$, obtendremos:

$$C_n = C_0(1+i)^{n-1}(1+i) = C_0(1+i)^{n-1+1} = C_0(1+i)^n$$

1.5. Tantos equivalentes

Éste suele ser un tema que produce dificultades en la comprensión para el alumno, no por tratarse de un concepto difícil, sino por no haberse

razonado de forma adecuada matemáticamente las fórmulas anteriores de capitalización simple y compuesta que son la base elemental de este concepto.

Como ha podido apreciar el lector, en los epígrafes anteriores se hablaba de los intereses producidos durante los distintos periodos, no hablando de años como suele hacer en las clases produciendo una mayor confusión. Con este epígrafe se comprenderá por qué la elección de ese término.

Se denominan tantos equivalentes a dos tipos de interés, independientemente de su aplicación temporal, tales que, aplicados a un mismo capital inicial se obtiene el mismo capital final.

La simbología utilizada para estos tipos de interés será $i^{(m)}$ cuando se trata de un tipo de interés por un periodo inferior a un año (mensual, trimestral, cuatrimestral, semestral, etc), e i cuando nos referimos al tipo de interés anual. Estos símbolos utilizados se deben a la definición establecida y acordada por los científicos.

La m será sustituida por el número de periodos que existen en un año, de tal forma que si $i^{(m)}$ se refiere al interés semestral, puesto que hay dos semestres al año la simbología adecuada será $i^{(2)}$. En el caso de la trimestral, habiendo cuatro trimestres en un año será $i^{(4)}$. En la bimestral $i^{(6)}$ y así sucesivamente.

Analizamos los tantos equivalentes en la capitalización simple. Como se ha estudiado en su epígrafe correspondiente, en este tipo de capitalización los intereses no generan más intereses. De esta forma, tratándose de una equivalencia deberá consistir en una igualdad entre la aplicación del tipo de interés de un periodo inferior a un año con la aplicación del tipo de interés anual al mismo capital:

$$C_0\left(1+i^{(m)}m\right)=C_0\left(1+in\right)$$

Recuérdese que la m es la letra por la que se representa el número de periodos existentes en un año. Respecto a la $i^{(m)}$ no se debe confundir con que el tipo de interés esté elevado a ese número, de tal forma que:

$$i^{(m)} \neq i^m$$

Así, imagínese el lector cualquier tipo de interés en un periodo inferior a un año para un capital inicial cualquiera. Dicho capital inicial se anulará por sí mismo quedando:

$$1 + i^{(m)}m = 1 + in$$

Las unidades desaparecen por sí mismas:

$$i^{(m)}m = in$$

Puesto que la *n* se refiere al número de periodos anuales que se están tratando y, en este caso, trabajamos con el periodo de un año, será igual a la unidad, pudiendo obtener ya el cálculo de $i^{(m)}$:

$$i^{(m)} = \frac{i}{m}$$

Realicemos el mismo razonamiento con un ejemplo cualquiera para un tipo de interés anual *i*, y se quiere obtener el tanto equivalente semestral. La primera cuestión a responder es, ¿cuántos semestres hay en un año? Puesto que hay dos semestres en un año ya tenemos el valor de *m* que es 2. Por tanto:

$$C_0(1 + i^{(m)}m) = C_0(1 + in)$$

$$C_0\left(1 + i^{(2)}2\right) = C_0\left(1 + in\right)$$

Puesto que el capital inicial se anula a sí mismo, al igual que la unidad de dentro del paréntesis, queda:

$$1 + i^{(2)}2 = 1 + in$$

$$i^{(2)}2 = in$$

Y dado que estamos trabajando con un único periodo anual, *n=1*, obteniéndose:

$$i^{(2)} = \frac{i}{2}$$

De esta forma, el interés semestral será igual al interés anual entre dos.

En el caso de que nos encontremos en capitalización compuesta, el planteamiento será exactamente el mismo pero tomando la fórmula razonada anteriormente. Con todo ello, dos tantos serán equivalentes cuando dos capitales sean iguales a un tipo de interés concreto por

periodos diferentes. En este caso tomaremos como referencia, al igual que en el anterior, el tipo de interés anual. Al periodo distinto que será inferior al anual lo representaremos con la letra *m* y será igual al número de periodos que haya en ese año. Por tanto:

$$C_0\left(1+i^{(m)}\right)^m = C_0\left(1+i\right)^n$$

Puesto que el periodo analizado es un año, *n=1,* y dado que el capital inicial se encuentra a ambos lados de la equivalencia, se anulan:

$$\left(1+i^{(m)}\right)^m = 1+i$$

A partir de aquí, en el caso de que tengamos el tipo de interés anual y queramos calcular otro de un periodo inferior tal que sea equivalente en capitalización compuesta, tan sólo habrá que calcular $i^{(m)}$, de tal forma que:

$$i^{(m)} = \sqrt[m]{1+i} - 1$$

En el caso contrario de que se quiera calcular un interés anual equivalente a otro de un periodo inferior, se tendrá:

$$i = \left(1+i^{(m)}\right)^m - 1$$

Así, por ejemplo, supongamos que se tiene un tipo de interés trimestral. Dado que en el periodo de un año hay cuatro trimestres, el dato que tendremos será:

$$m = 4 \rightarrow i^{(m)} = i^{(4)}$$

$$\left(1+i^{(4)}\right)^4 = 1+i$$

Y a partir de aquí se puede calcular el interés anual o el trimestral equivalente según el problema planteado.

1.6. Tasa Anual Equivalente (TAE)

El concepto de TAE o Tasa Anual Equivalente queda recogido en la Circular número 8/1990, de 7 de septiembre, a Entidades de Crédito, sobre transparencia de las operaciones y protección de la clientela.

En la norma octava, punto 4.º A) se dispone: «En el cálculo del coste

efectivo se incluirán las comisiones y demás gastos cuyo devengo sea a favor de la entidad. No se considerarán a estos efectos los gastos complementarios o suplidos (timbres, corretajes a favor de terceros, gastos notariales, etc.), aun cuando debe quedar expresa y claramente indicado que la Tasa Anual Efectiva de coste no incluye tales gastos, que han de detallarse uno a uno».

Ello significa que todos los gastos en comisiones y demás gastos obligatorios de la operación deben estar incluidos en el tanto equivalente compuesto del epígrafe anterior para calcular el tipo de interés anual.

La TAE se constituye como un elemento homogéneo que debe constar en la documentación y la publicidad de los productos financieros ofrecidos por las entidades financieras para que el consumidor pueda compararlos con otras ofertas y conocer rápidamente la rentabilidad ofertada.

1.7. Ley de descuento simple comercial

Curiosamente, se ha experimentado que esta fórmula no la razona ningún profesor en clase, desconociéndose el motivo, cuando su planteamiento lógico es muy sencillo y parecido al de la capitalización simple, copiando directamente la fórmula de descuento simple en la pizarra:

$$C_0 = C_n\left(1 - dn\right)$$

El descuento, al contrario que la capitalización, consiste en conocer el valor actual de un capital conocido en el futuro.

Como se ha razonado anteriormente, el dinero con el tiempo se devalúa perdiendo capacidad adquisitiva salvo extrañas ocasiones en las que el tipo de interés es negativo por capricho del mercado como consecuencia, generalmente, de la especulación.

En este caso, puesto que se trata de un descuento, por definición cambiamos la simbología y en vez de utilizar el término *tipo de interés* utilizamos el de *tipo de descuento* representado con una *d*.

Al tratarse del descuento comercial, éste se aplicará sobre el valor nominal, es decir, el capital final.

La representación gráfica para un número de periodos cualquiera queda:

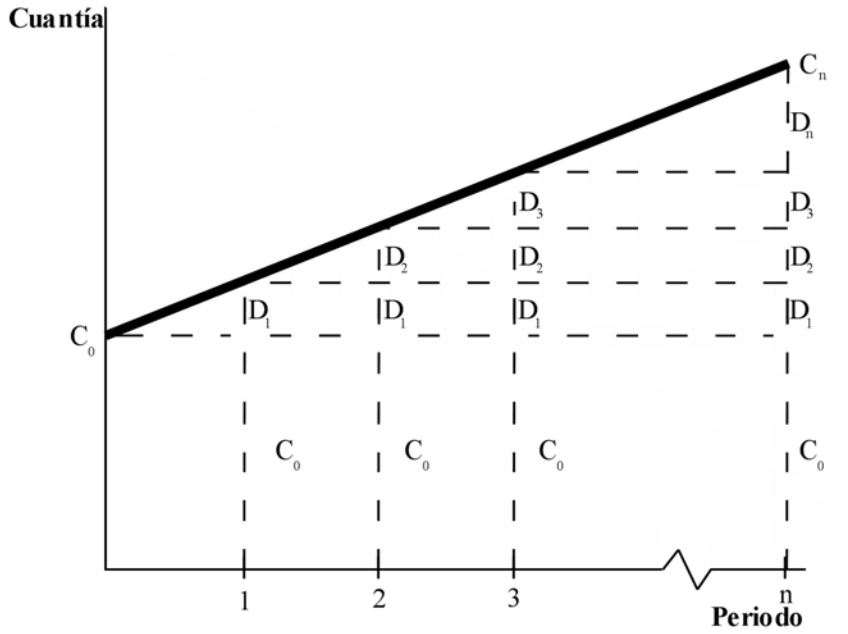


Figura 13.ª Descuento simple para cualquier número de periodos.

Así, supongamos que se tiene un capital en el periodo uno C_1 cuyo valor actual se pretende conocer a un tipo de descuento *d*. Se tendría:

$$C_1 = C_0 + D_1$$

Dado que el objetivo es conocer el capital inicial y no el final, despejaremos el primero:

$$C_0 = C_1 - D_1$$

Y sabemos que:

$$D_1 = C_1 \bullet d$$

Por lo tanto:

$$C_0 = C_1 - C_1 d \rightarrow C_0 = C_1\left(1 - d\right)$$

En el segundo caso de que se tuviera el capital en el segundo año, al tratarse de un descuento simple, ocurre lo mismo que en la capitalización simple, el tipo de descuento sólo se aplicará siempre sobre el mismo capital, es decir, el capital final o valor nominal, pues estamos en el descuento comercial. Al tratarse de dos periodos, el capital final sería C_2,

siendo el descuento del periodo primero y segundo el mismo:

$$D_1 = D_2 = dC_2$$

De tal forma que:

$$C_0 = C_2 - dC_2 - dC_2 \rightarrow C_0 = C_2(1 - d2)$$

Para un número de periodos *n* cualquiera:

$$D_1 = D_2 = D_3 \ldots = D_n = dC_n$$

$$C_0 = C_n - C_n d - C_n d - C_n d \ldots "n" veces$$

$$C_0 = C_n(1 - d - d - d \ldots "n" veces)$$

$$C_0 = C_n(1 - dn)$$

1.8. Ley de descuento compuesto comercial

Nuevamente, el descuento se aplicaría sobre el capital final C_n al ser comercial por ser éste su valor nominal.

Sin embargo, a diferencia del caso anterior, los descuentos producidos se calcularán sobre el capital final de cada periodo.

De esta forma, el valor nominal no será siempre C_n, sino que será el capital de cada periodo en el que se esté calculando el descuento.

El planteamiento gráfico es como se muestra en la figura siguiente. La única diferencia respecto a la capitalización es que ya no se trata de conocer un capital actual en un momento futuro concreto, sino justamente lo inverso, conocer el valor actual sabiendo el valor futuro.

A este paso se le llama actualización o descuento, y para su cálculo en el sistema compuesto debe tenerse en cuenta que el tipo de descuento es un porcentaje que se aplicará a un capital final, pero este capital final varía según el periodo que tratemos, pues es compuesto y no simple.

Así, mientras que en el último periodo *n* se toma como capital final el conocido, en el penúltimo periodo *n-1* se tomará como capital final el capital inicial hallado en el último periodo, es decir, quitando el descuento calculado.

Gráficamente:

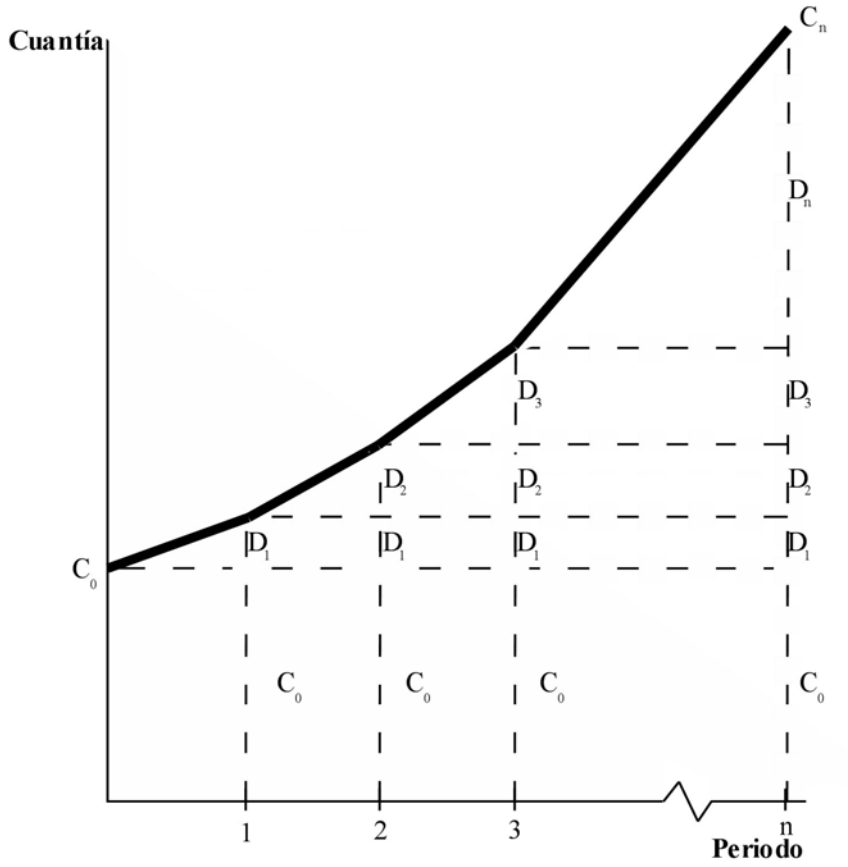


Figura 14.ª Descuento compuesto para un número *n* de periodos.

El razonamiento lógico será el siguiente:

$$C_{n-1} = C_n - C_n d \rightarrow C_{n-1} = C_n(1-d)$$

$$C_{n-2} = C_{n-1}(1-d) = C_n(1-d)(1-d) \rightarrow C_{n-2} = C_n(1-d)^2$$

$$C_{n-3} = C_{n-2}(1-d) = C_n(1-d)^2(1-d) \rightarrow C_{n-3} = C_n(1-d)^3$$

$$C_{n-n} = C_0 = C_n(1-d)^{n-1}(1-d) \rightarrow C_0 = C_n(1-d)^n$$

1.9. Descuento racional

Si bien en los dos epígrafes anteriores se ha dicho que el descuento comercial consiste en aplicar el tipo de descuento sobre el valor nominal, es decir, C_n, el descuento racional supone aplicar el tipo al capital inicial o valor actual. De esta forma, para el cálculo del valor actual mediante

descuento racional acudiremos de nuevo al concepto de tipo de interés o *i*, ya que es el término que se aplica al capital inicial y no al final. Así, partiremos de las formulas de capitalización simple y compuesta para hallar el valor actual:

$$C_n = C_0(1+in) \rightarrow C_0 = \frac{C_n}{1+in} = C_n(1+in)^{-1}$$

$$C_n = C_0(1+i)^n \rightarrow C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n} = C_n(1+i)^{-n}$$

1.10. Ejercicios prácticos resueltos

A continuación, se enuncian una serie de ejercicios prácticos y se resuelven paso a paso, debiendo recordar el estudiante lo razonado en este tema.

1.º Se tiene un capital actual de 10.000 euros que se ha depositado en una cuenta abierta en el banco a un tipo de interés del 0,1 % de interés anual a dos años. ¿Qué capital final obtendremos?

$C_0 = 10.000$

$i_a = 0{,}1\%$

$n = 2$

$C_n = ¿?$

$C_n = C_0(1+in) = 10.000 \bullet (1+0{,}001 \bullet 2) = 10.020$

2.º ¿Qué capital final obtendremos si invertimos 120.000 euros a un tipo de interés del 2,3 % anual desde el 3 de octubre de 2018 al 9 de enero de 2019?

La primera cuestión que debemos resolver es cuántos días hay en el periodo indicado excluyendo el día en que se realiza el depósito (al ser el primer día aún no se han generado intereses) e incluyendo el último día en que finaliza.

$n = 31 - 3 + 30 + 31 + 9 = 98$ días

Dado que el plazo comienza el 3 de octubre y que este mes tiene 31 días, restamos a 31 los 3 días que quedan fuera. Noviembre y diciembre son

meses completos y de enero el periodo sólo ocupa 9 días sumando un total de 98 días.

$$C_n = C_0\left(1 + i\frac{n}{365}\right)$$

$$C_n = 120.000 \bullet \left(1 + 0{,}023 \bullet \frac{98}{365}\right) = 120.741{,}04$$

Cuyo resultado es 120.741,04 euros.

3.º Se depositan a plazo fijo un importe de 150.000 euros a un tipo de interés del 1,21 % simple anual desde el 12 de octubre de 2018 al 21 de octubre del 2019. A los intereses obtenidos en ese periodo se les aplica una retención del 21 %. ¿Qué liquidez se obtendrá?

$n = 365 + 9 = 374$ días

$$I = C_0 i \frac{n}{365}$$

$$I = 150.000 \bullet 0{,}0121 \bullet \frac{374}{365} = 1.859{,}75$$

Se obtienen de interés en total 1.859,75 euros en el periodo, pero lo que necesitamos saber es la liquidez final sabiendo que existe una retención del 21 %. Así pues, lo que se ingresará de intereses será:

$$I - reten. = 1.859{,}75 \bullet (1 - 0{,}21) = 1.469{,}20$$

Siendo la liquidez final de:

$$Liquidez = C_0 + I - reten. = 150.000 + 1.469{,}20 = 151.469{,}20$$

4.º Habiendo invertido un capital de 275.000 euros a interés simple, se han obtenido286.301,37 euros desde el 12 de octubre de 2018 hasta el 8 de agosto de 2019. ¿Cuál es el tipo de interés aplicado en la operación?

Tras contar el número de días existentes en ese periodo sabemos que:

$n = 300$ días

$$C_n = C_0\left(1 + i\frac{n}{365}\right)$$

$$286.301,37 = 275.000 \bullet \left(1 + i \bullet \frac{300}{365}\right)$$

$$\frac{286.301,37}{275.000} = 1 + i \bullet \frac{300}{365}$$

Despejamos *i* y operamos:

$$i = \left(\frac{286.301,37}{275.000} - 1\right) \bullet \frac{365}{300}$$

$$i = 0,05 \Rightarrow i = 5\%$$

5.º Se han generado unos intereses a un tipo simple anual de 2,18 % en el periodo desde el 5 de agosto al 14 de octubre de 2018 que ascienden a 418,08 euros. ¿Cuánto capital se ha invertido?

$n = 31 - 5 + 30 + 14 = 70$ días

$$I = C_0 i \frac{n}{365}$$

$$418,08 = C_0 \bullet 0,0218 \bullet \frac{70}{365} \Rightarrow C_0 = \frac{418,08 \bullet 365}{0,0218 \bullet 70} = 100.000$$

6.º ¿Cuánto tiempo hace falta para duplicar un capital invertido al 10 % de interés anual simple?

Para resolver este problema debemos recordar, como siempre, la fórmula de capitalización simple y, además, saber que el capital final es necesariamente el doble que el capital inicial. Por tanto, el planteamiento es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} C_n = C_0\left(1+i\dfrac{n}{365}\right) \\ C_n = 2C_0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2C_0 = C_0\left(1+i\frac{n}{365}\right)$$

Ya sólo queda despejar el valor del capital inicial tras sustituir los valores conocidos:

$$2C_0 = C_0\left(1+0{,}1\bullet\frac{n}{365}\right) \Rightarrow \frac{2C_0}{C_0} = \left(1+0{,}1\bullet\frac{n}{365}\right)$$

Dado que un número entre sí mismo es uno, aunque desconocemos el valor del capital inicial no es necesario:

$$2 = \left(1+0{,}1\bullet\frac{n}{365}\right) \Rightarrow n = \frac{2-1}{0{,}1}\bullet 365$$

$$n = 3.650\,dias = 10\,años$$

7.º ¿Cuál sería el resultado del primer ejercicio si el tipo de interés fuera compuesto? Recuérdese: capital inicial de 10.000 euros a un tipo de interés de 0,1 % anual en dos años.

$$C_n = C_0\left(1+i\right)^n$$

$$C_n = 10.000\bullet\left(1+0{,}001\right)^2 = 10.020{,}01$$

Así, la diferencia entre la capitalización simple del ejercicio 1.º y la compuesta de éste es de tan solo un céntimo de euro.

¿Y si la capitalización fuera mensual siendo el interés dado nominal?

En este caso se cobrarían los intereses al final de cada mes, los cuales generarían más intereses. Por tanto, el cálculo de los periodos cambiaría:

$$C_n = 10.000 \bullet \left(1 + \frac{0{,}001}{12}\right)^{2 \bullet 12} = 10.020{,}02$$

El resultado es un céntimo superior a la capitalización anual del apartado anterior y dos céntimos superior a la capitalización simple.

8.º ¿Cuánto tiempo se necesita para duplicar un capital en dos años a un tipo de interés del 10 % anual? Comparar el resultado con el ejercicio 6.º.

$$\left.\begin{array}{l} C_n = C_0(1+i)^n \\ C_n = 2C_0 \end{array}\right\} 2C_0 = C_0(1+i)^n$$

$$\frac{2C_0}{C_0} = (1+i)^n \Rightarrow 2 = (1+0{,}1)^n$$

Para resolver esta ecuación son necesarios logaritmos:

$$\log 2 = \log(1{,}1)^n \Rightarrow \log 2 = n \log 1{,}1$$

$$n = \frac{\log 2}{\log 1{,}1} = 7{,}27\, años$$

En el ejercicio 6.º se necesitaban de 10 años, en éste de capitalización compuesta sólo 7 años y 4 meses.

9.º Se ha invertido un capital al 5 % anual nominal durante cinco años capitalizables mensualmente y se ha obtenido una liquidez final de 64.167,93 euros. ¿Cuánto capital se ha invertido?

Al ser la capitalización mensual y compuesto, recuérdese que los intereses generados en cada mes generan más intereses. Además, nótese que el tipo de interés es nominal. Así:

$$C_n = C_0\left(1+\frac{i_a}{12}\right)^{n\bullet 12}$$

$$64.167,93 = C_0\left(1+\frac{0,05}{12}\right)^{5\bullet 12} \Rightarrow C_0 = \frac{64.167,93}{\left(1+\frac{0,05}{12}\right)^{5\bullet 12}}$$

Resolviéndose la operación, el capital invertido es 50.000 euros.

10.º Un capital que se invirtió al 2,5 % anual nominal de interés compuesto durante dos años ha producido unos intereses de 2.407,17 euros. ¿A cuánto asciende el capital invertido?

$$\left.\begin{array}{c} C_n = C_0\left(1+\frac{i_a}{12}\right)^{n\bullet 12} \\ C_n = C_0 + I \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} C_n = C_0\left(1+\frac{0,025}{12}\right)^{2\bullet 12} \\ C_n = C_0 + 2.407,17 \end{array}$$

$$C_0 + 2.407,17 = C_0\left(1+\frac{0,025}{12}\right)^{24}$$

$$C_0 + 2.407,17 = 1,05121642C_0$$

$$2.407,17 = 1,05121642C_0 - C_0$$

$$2.407,17 = C_0\left(1,05121642 - 1\right)$$

$$C_0 = \frac{2.407,17}{0,051216419} = 47.000 \text{ euros.}$$

11.º Un capital se invierte al 1,5 % anual nominal capitalizable mensualmente a 5 años. ¿A qué tipo de interés simple se tendrá que contratar para obtener los mismos intereses en el mismo periodo de tiempo?

Según la cuestión planteada, el capital final en ambos casos es el mismo, por lo que sólo queda plantear el cálculo para cada caso. Así, en el caso de interés compuesto:

$$C_n = C_0\left(1+\frac{i}{12}\right)^{n\bullet 12} = C_0\left(1+\frac{0{,}015}{12}\right)^{5\bullet 12}$$

En el caso del interés simple:

$$C_n = C_0\left(1+\frac{i}{12}12n\right) = C_0 \bullet (1+5i)$$

Así, se igualan ambas ecuaciones:

$$C_0\left(1+\frac{0{,}015}{12}\right)^{60} = C_0(1+5i)$$

$$\left(1+\frac{0{,}015}{12}\right)^{60} = 1+5i$$

$$i = \frac{\left(1+\frac{0{,}015}{12}\right)^{60}-1}{5} = 0{,}0155 = 1{,}55\%$$

12.º ¿Qué capital habrá que invertir para producir unos intereses de 12.000 euros al 8,5 % anual nominal capitalizable mensualmente durante 5 años?

Sabemos que:

$$\left.\begin{array}{l} C_n = C_0(1+i)^n \\ C_n - C_0 = I \end{array}\right\} C_n = C_0\left(1+\frac{0{,}085}{12}\right)^{5\cdot 12}$$
$$C_n - C_0 = 12.000$$

$$\left.\begin{array}{l} C_n = C_0\left(1+\frac{0{,}085}{12}\right)^{5\cdot 12} \\ C_n = 12.000 + C_0 \end{array}\right\} 12.000 + C_0 = C_0\left(1+\frac{0{,}085}{12}\right)^{5\cdot 12}$$

$$12.000 + C_0 = C_0 \cdot 1{,}52 \Rightarrow 12.000 = 1{,}52C_0 - C_0$$

$$12.000 = C_0(1{,}52 - 1) \Rightarrow 12.000 = 0{,}52C_0$$

$$C_0 = \frac{12.000}{0{,}52} = 22.757{,}42\ euros$$

13.º Un inversor deposita en una cuenta un capital al 3 % anual nominal simple capitalizable mensualmente durante 3 años. ¿Qué tipo de interés compuesto se tendrá que obtener para tener el mismo beneficio durante el mismo periodo y capitalización mensual?

Dado que estamos equiparando los intereses obtenidos durante el mismo periodo por el sistema simple y compuesto siendo la incógnita el tipo de interés compuesto:

$$C_n = C_0(1 + i \cdot n) \Rightarrow C_n = C_0\left(1+\frac{0{,}03}{12}\cdot 12 \cdot 3\right)$$

$$C_n = C_0(1+i)^n \Rightarrow C_n = C_0\left(1+\frac{i}{12}\right)^{12\cdot 3}$$

$$C_0 \bullet \left(1 + \frac{0{,}03}{12} \bullet 12 \bullet 3\right) = C_0 \bullet \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{12 \bullet 3}$$

$$1{,}09 = \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{36} \Rightarrow \sqrt[36]{1{,}09} = 1 + \frac{i}{12}$$

$$i = \left(\sqrt[39]{1{,}09} - 1\right) \bullet 12 = 0{,}0288 = 2{,}88\,\%$$

14.º ¿A qué tipo de interés anual efectivo equivale un 5 % nominal anual de liquidación mensual?

Este ejercicio consiste en hacer una equivalencia entre el interés nominal y el efectivo que, en realidad, se ha estado realizando durante todos los ejercicios anteriores. Recuérdese que:

$$\left(1 + i_a\right) = \left(1 + \frac{i_n}{n}\right)^n$$

$$\left(1 + i\right) = \left(1 + \frac{i_{12}}{12}\right)^{12} \Rightarrow \left(1 + i\right) = \left(1 + \frac{0{,}05}{12}\right)^{12}$$

$$i = \left(1 + \frac{0{,}05}{12}\right)^{12} - 1 = 0{,}0512 = 5{,}12\,\%$$

15.º Un cliente quiere comprar un coche de segunda mano por valor de 25.000 euros. Para facilitar la compra aceptas el pago mediante tres letras de igual importe a 120, 240 y 360 días. Sabes que podrás descontarlas a un 4 % comercial y por el pago aplazado pactas con el cliente una subida del precio del 2,5 %. ¿Cuál es el importe de las tres letras?

En primer lugar, debe calcularse el importe final de venta:

$$C_0 = 25.000 + 25.000 \bullet 0{,}025 = 25.000 \bullet 1{,}025 = 25.625\,euros$$

Puesto que el importe de todas las letras es el mismo y la suma de todos ellos debe ser el capital hallado anteriormente, tenemos que:

$$C_0 = C\left(1 - d\frac{n_1}{360}\right) + C\left(1 - d\frac{n_2}{360}\right) + C\left(1 - d\frac{n_3}{360}\right)$$

$$C_0 = C\left(1 - d\frac{n_1}{360} + 1 - d\frac{n_2}{360} + 1 - d\frac{n_3}{360}\right)$$

$$C_0 = C\left[3 - \frac{d}{360}\left(n_1 + n_2 + n_3\right)\right]$$

$$25.625 = C \bullet \left[3 - \frac{0{,}04}{360} \bullet \left(120 + 240 + 360\right)\right]$$

$$C = \frac{25.625}{\left[3 - \frac{0{,}04}{360} \bullet \left(120 + 240 + 360\right)\right]} = 8.775{,}68\, euros$$

El importe de cada una de las tres letras es de 8.775,68 euros.

16.º ¿De cuánto tiempo se requiere para que de una letra de 1.000 euros descontada al 4,75 % anual compuesto se obtengan 925 euros?

$$C_0 = C_n\left(1 - d\right)^n$$

$$925 = 1.000 \bullet \left(1 - 0{,}0475\right)^n \Rightarrow \frac{925}{1.000} = 0{,}9525^n$$

$$Ln\, 0{,}925 = Ln\, 0{,}9525^n \Rightarrow Ln\, 0{,}925 = n \bullet Ln\, 0{,}9525$$

$$n = \frac{Ln\,0{,}925}{Ln\,0{,}9525} = 1{,}6\,años$$

17.º Tienes tres opciones diferentes para invertir. La primera es a un tipo de interés nominal del 4 % nominal anual capitalizable mensualmente. La segunda es a un 1 % trimestral compuesto. La tercera es a un 0,5 % bimensual compuesto. ¿Qué alternativa escogerías?

Este problema consiste en equiparar los tres tipos de interés convirtiéndolos al tipo de interés anual TAE. Así, para cada uno de los casos, debiendo recordar que:

$$1 + i_a = \left(1 + \frac{i_n}{n}\right)^n$$

$$1.ª\,alternativa \Rightarrow 1 + i_a = \left(1 + \frac{0{,}04}{12}\right)^{12}$$

$$i_a = \left(1 + \frac{0{,}04}{12}\right)^{12} - 1 = 0{,}0407 = 4{,}07\,\%$$

$$2.ª\,alternativa \Rightarrow 1 + i_a = (1 + 0{,}01)^4$$

$$i_a = (1 + 0{,}01)^4 - 1 = 0{,}0406 = 4{,}06\,\%$$

$$3.ª\,alternativa \Rightarrow 1 + i_a = (1 + 0{,}005)^6$$

$$i_a = (1 + 0{,}005)^6 - 1 = 0{,}0304 = 3{,}04\,\%$$

La mejor alternativa es la que se obtenga un mayor TAE, es decir, la primera.

18.º Saber realizar la equivalencia en los tipos de interés es muy importante, por lo que te propongo los siguientes cálculos. Calcular el tipo de interés anual efectivo equivalente o TAE de:

***a*) 6 % anual nominal capitalizable mensualmente.**

***b*) 0,5 % mensual compuesto.**

***c*) 1,5 % trimestral compuesto.**

***d*) 3 % semestral compuesto.**

Ya sabemos la fórmula, la hemos repetido en los ejercicios anteriores y razonado lógicamente en el desarrollo del tema. Así, resolvamos:

$$Apartado\,a) \Rightarrow 1 + i_a = \left(1 + \frac{0{,}06}{12}\right)^{12}$$

$$i_a = \left(1 + \frac{0{,}06}{12}\right)^{12} - 1 = 0{,}0617 = 6{,}17\,\%$$

$$Apartado\,b) \Rightarrow 1 + i_a = \left(1 + 0{,}005\right)^{12}$$

$$i_a = \left(1 + 0{,}005\right)^{12} - 1 = 0{,}0617 = 6{,}17\,\%$$

$$Apartado\,c) \Rightarrow 1 + i_a = \left(1 + 0{,}015\right)^{4}$$

$$i_a = \left(1 + 0{,}015\right)^{4} - 1 = 0{,}0614 = 6{,}14\,\%$$

$$Apartado\,d) \Rightarrow 1 + i_a = \left(1 + 0{,}03\right)^{2}$$

$$i_a = \left(1 + 0{,}03\right)^{2} - 1 = 0{,}0609 = 6{,}09\,\%$$

En conclusión, cuantas más veces se liquide el interés generado en un mismo periodo, más TAE se obtendrá, pues los intereses liquidados comenzarán a generar más intereses.

19.º Un banco te ofrece un instrumento financiero por el que obtendrías un 6 % anual nominal capitalizable mensualmente. Te planteas invertir 30.000 euros. ¿Qué intereses obtendrías en cada periodo?

Dado que el interés es capitalizable mensualmente, son doce periodos cuyos intereses generados debemos analizar, coincidentes con la mensualidad. Recuerda:

$$I = C_0 \bullet \frac{i_a}{n}$$

$$C_n = C_0 + I$$

$$1.^{er}\ mes \Rightarrow I_1 = C_0 \bullet \frac{i_a}{n} = 30.000 \bullet \frac{0{,}06}{12} = 150$$

$$C_1 = C_0 + I_1 = 30.000 + 150 = 30.150$$

$$2.^{o}\ mes \Rightarrow I_2 = C_1 \bullet \frac{i_a}{n} = 30.150 \bullet \frac{0{,}06}{12} = 150{,}75$$

$$C_2 = C_1 + I_2 = 30.150 + 150{,}75 = 30.300{,}75$$

$$3.^{er}\ mes \Rightarrow I_3 = C_2 \bullet \frac{i_a}{n} = 30.300{,}75 \bullet \frac{0{,}06}{12} = 151{,}50$$

$$C_3 = C_2 + I_3 = 30.300{,}75 + 151{,}50 = 30.452{,}25$$

$$4.^{o}\ mes \Rightarrow I_4 = C_3 \bullet \frac{i_a}{n} = 30.452{,}25 \bullet \frac{0{,}06}{12} = 152{,}26$$

$$C_4 = C_3 + I_4 = 30.452{,}25 + 152{,}26 = 30.604{,}51$$

$$5.^{o}\ mes \Rightarrow I_5 = C_4 \bullet \frac{i_a}{n} = 30.604{,}51 \bullet \frac{0{,}06}{12} = 153{,}02$$

$$C_5 = C_4 + I_5 = 30.604{,}51 + 153{,}02 = 30.757{,}53$$

$$6.^{o}\ mes \Rightarrow I_6 = C_5 \bullet \frac{i_a}{n} = 30.757{,}53 \bullet \frac{0{,}06}{12} = 153{,}79$$

$$C_6 = C_5 + I_6 = 30.757{,}53 + 153{,}79 = 30.911{,}32$$

Y así sucesivamente hasta el 12.º mes.

20.º Repetir el problema anterior pero siendo el tipo de interés anual compuesto.

Al ser el tipo de interés anual compuesto, el planteamiento de la equivalencia es inversa, de tal forma que:

$$1+i_a=\left(1+i_{12}\right)^{12}\Rightarrow 1+0{,}06=\left(1+i_{12}\right)^{12}$$

Así, el interés mensual con el que operar es:

$$i_{12}=\sqrt[12]{1{,}06}-1=0{,}004867$$

$$1.^{er}\ mes\Rightarrow I_1=C_0\bullet i_{12}=30.000\bullet 0{,}004867=146{,}03$$
$$C_1=C_0+I_1=30.000+146{,}03=30.146{,}03$$
$$2.^{o}\ mes\Rightarrow I_2=C_1\bullet i_{12}=30.146{,}03\bullet 0{,}004867=146{,}74$$
$$C_2=C_1+I_2=30.146{,}03+146{,}74=30.292{,}77$$
$$3.^{er}\ mes\Rightarrow I_3=C_2\bullet i_{12}=30.292{,}77\bullet 0{,}004867=147{,}43$$
$$C_3=C_2+I_3=30.292{,}77+147{,}43=30.440{,}20$$
$$4.^{o}\ mes\Rightarrow I_4=C_3\bullet i_{12}=30.440{,}20\bullet 0{,}004867=148{,}15$$
$$C_4=C_3+I_4=30.440{,}20+148{,}15=30.588{,}35$$
$$5.^{o}\ mes\Rightarrow I_5=C_4\bullet i_{12}=30.588{,}35\bullet 0{,}004867=148{,}87$$
$$C_5=C_4+I_5=30.588{,}35+148{,}87=30.737{,}22$$
$$6.^{o}\ mes\Rightarrow I_6=C_5\bullet i_{12}=30.737{,}22\bullet 0{,}004867=149{,}60$$
$$C_6=C_5+I_6=30.737{,}22+149{,}60=30.886{,}82$$

Y así sucesivamente hasta el 12.º mes.

21.º Tienes en tu posesión una letra cuyo valor nominal es de 900 euros y cuyo vencimiento es a 60 días. Acudes al banco para descontarla y te ofrecen 850 euros por ella. Calcula el tipo de descuento que está aplicando.

$$C_0=C_n\left(1-d\frac{n}{360}\right)$$

$$850 = 900\left(1 - d\,\frac{60}{360}\right) \Rightarrow \left(\frac{850}{900} - 1\right) = -d\,\frac{60}{360}$$

$$d\,\frac{60}{360} = 1 - \frac{850}{900} \Rightarrow d = \left(1 - \frac{850}{900}\right)\frac{360}{60} = 33{,}33\%$$

22.º Calcula el valor actual de un efecto comercial de 10.000 euros a 30 días a un tipo del 8,5 % anual comercial.

$$C_0 = C_n\left(1 - d\,\frac{n}{360}\right)$$

$$C_0 = 10.000\left(1 - 0{,}085\frac{30}{360}\right) = 9.929{,}17\,euros$$

23.º Calcular el descuento de una letra de 1.500 euros a 90 días al 6,5 % comercial.

$$D = C_n - C_0$$

$$C_0 = C_n\left(1 - d\,\frac{n}{360}\right) = 1.500\left(1 - 0{,}065\frac{90}{360}\right) = 1.475{,}63$$

$$D = 1.500 - 1.475{,}63 = 24{,}37\,euros$$

24.º El descuento comercial de un efecto de 750 euros al 5,5 % anual es de 25 euros. ¿Cuántos días faltan para su vencimiento?

$$D = C_n - C_0 \Rightarrow 25 = 750 - C_0 \Rightarrow C_0 = 725\,euros$$

$$C_0 = C_n\left(1 - d\,\frac{n}{360}\right) \Rightarrow 725 = 750\left(1 - 0{,}055\frac{n}{360}\right)$$

$$\frac{725}{750} - 1 = -0{,}055\frac{n}{360} \Rightarrow 0{,}055\frac{n}{360} = 1 - \frac{725}{750}$$

$$n = \left(1 - \frac{725}{750}\right)\frac{360}{0{,}055} = 218{,}18$$

Así, quedan 219 días.

25.º Quieres comprar un ordenador portátil de última generación cuyo importe es de 1.750 euros al contado. El comercial, para facilitar la venta, te propone financiar el pago mediante dos letras de igual importe, la primera a 30 días y la segunda a 90 días. ¿Cuál debe ser el importe de cada una de las letras para que el comerciante no pierda en la operación de venta a plazo teniendo el cuenta que el descuento comercial es del 5 %?

Se trata de dos letras de igual importe pero de vencimiento diferente. Así, el capital final de cada una de las letras es el mismo y sumadas una vez descontadas según el plazo de cada una debe ser igual al importe del ordenador para que el comercial no pierda dinero. Es decir:

$$1.750 = C\left(1 - 0{,}05\frac{30}{360}\right) + C\left(1 - 0{,}05\frac{90}{360}\right)$$

$$1.750 = 0{,}9958C + 0{,}9875C \Rightarrow 1.750 = 1{,}9833C$$

$$C = \frac{1.750}{1{,}9833} = 882{,}35\,euros$$

El importe de cada letra debe ser de 882,35 euros.

Otro método de resolución es el siguiente:

$$C_0 = C\left(1 - d\,\frac{n_1}{360}\right) + C\left(1 - d\,\frac{n_2}{360}\right)$$

$$C_0 = C\left(1 - d\frac{n_1}{360} + 1 - d\frac{n_2}{360}\right)$$

$$C_0 = C\left[2 - \frac{d}{360}\left(n_1 + n_2\right)\right]$$

$$C = \frac{C_0}{\left[2 - \frac{d}{360}\left(n_1 + n_2\right)\right]} = \frac{1.750}{\left[2 - \frac{0{,}05}{360}\left(30 + 90\right)\right]} = 882{,}35$$

26.º Calcula el valor actual de una letra de 490 euros a 60 días descontada racionalmente al 4,25 %.

Recuérdese el concepto de descuento racional:

$$C_n = C_0\left(1 + in\right) \Rightarrow C_0 = \frac{C_n}{\left(1 + in\right)}$$

$$C_0 = \frac{490}{\left(1 + 0{,}0425\frac{60}{360}\right)} = 486{,}55\,euros$$

27.º Una letra cuyo valor nominal es de 750 euros es descontada al 8,06 % racional obteniéndose un valor de 736 euros. ¿De qué plazo es la letra?

$$C_0 = \frac{C_n}{\left(1 + in\right)} \Rightarrow 736 = \frac{750}{\left(1 + 0{,}0806 \bullet \frac{n}{360}\right)}$$

$$1+0{,}0806\bullet\frac{n}{360}=\frac{750}{736}\Rightarrow n=\left(\frac{750}{736}-1\right)\bullet\frac{360}{0{,}0806}=85$$

La letra vence a los 85 días aproximadamente.

28.º Calcula a qué tipo de descuento racional a 120 días equivale al 7 % comercial en el mismo periodo.

$$\frac{C}{1+i\dfrac{n}{360}}=C\left(1-d\frac{n}{360}\right)\Rightarrow\frac{1}{1+i\dfrac{n}{360}}=1-d\frac{n}{360}$$

$$1+i\frac{n}{360}=\frac{1}{1-d\dfrac{n}{360}}\Rightarrow i=\left(\frac{1}{1-d\dfrac{n}{360}}-1\right)\frac{360}{n}$$

$$i=\left(\frac{1}{1-0{,}07\bullet\dfrac{120}{360}}-1\right)\bullet\frac{360}{120}=0{,}0717=7{,}17\,\%$$

29.º Calcula el valor actual de una letra en tu poder cuyo valor es de 1.050 euros y descuentas al 5,3 % compuesto cuyo vencimiento es dentro de 3 años.

$$C_0=C_n\left(1-d\right)^n=1.050\bullet\left(1-0{,}053\right)^3=891{,}74\,euros$$

30.º ¿Cuánto tiempo de descuento es el que sufre un efecto de valor 1.500 euros si al descontarse al 4,5 % anual compuesto se obtienen 1.300 euros?

$$C_0 = C_n\left(1-d\right)^n \Rightarrow 1.300 = 1.500 \bullet \left(1-0{,}045\right)^n$$

$$\frac{1.300}{1.500} = 0{,}955^n \Rightarrow Ln\frac{13}{15} = Ln\,0{,}955^n$$

$$Ln\frac{13}{15} = n\,Ln\,0{,}955 \Rightarrow n = \frac{Ln\frac{13}{15}}{Ln\,0{,}955} = 3{,}11$$

El tiempo durante el que se descuenta la letra es de 3 años y algo más de un mes.

31.º Tienes un pagaré de 50.000 euros y decides descontarla obteniendo 45.000 euros a dos años una vez deducido el timbre del 1 ‰. ¿A qué tanto anual compuesto la estás descontando?

En primer lugar, debe calcularse el capital inicial que se obtiene líquido:

$$C_0 = 45.000 + 45.000 \bullet 0{,}001 = 45.045$$

$$C_0 = C_n\left(1-d\right)^n \Rightarrow 45.045 = 50.000 \bullet \left(1-d\right)^2$$

$$d = 1 - \sqrt{\frac{45.045}{50.000}} = 0{,}0508 = 5{,}08\,\%$$

II

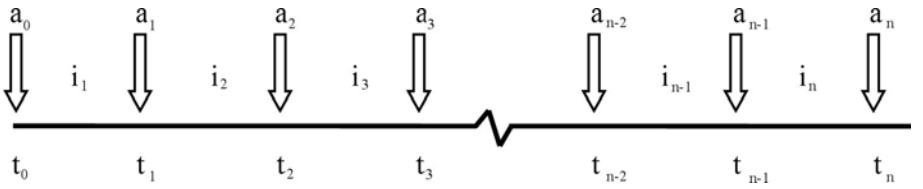
RENTAS

2.1. Introducción

Una renta está formada por un conjunto de capitales distribuidos a lo largo de un periodo de tiempo. Dichos capitales estarán sometidos a un tipo de interés concreto por periodos determinados.

Los periodos de tiempo en que se tiene cada capital pueden ser iguales o diferentes. El importe de cada capital también puede ser igual o diferente y lo mismo ocurre con el tipo de interés aplicable en cada periodo.

Así, una renta se puede representar gráficamente de la siguiente forma:



Cada capital a_x que se obtiene en el periodo t_x tiene un valor determinado en ese mismo periodo. Sin embargo, como se ha razonado en el capítulo anterior no será el mismo el valor en ese momento que en actual. Así, para poder conocer el valor total de la renta no se pueden sumar capitales cuya valoración son dispares en el tiempo.

De esta forma, para conocer el valor total de la renta se deberá proceder a calcular el valor de cada uno de los capitales a_x en el mismo periodo de tiempo, independientemente de que éste sea el inicial t_0, el final t_n o cualquiera de los intermedios.

Los periodos de tiempo más interesantes a efectos de valoración y comparación de rentas son el valor inicial y el final de la misma.

Para el cálculo del valor inicial de una renta, es decir, en el momento t_0, debe actualizarse cada uno de los capitales a_x que la componen. Así, conociendo la fórmula de capitalización compuesta, dado que estamos trabajando con tipos de interés y no de descuento, para calcular el valor inicial en el momento t_0 simplemente debe despejarse y aplicarse a cada

uno de los capitales según el periodo y el tipo de interés concreto. Así:

$$C_n = C_0(1+i)^n \rightarrow C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n}$$

Puesto que el capital a_0 se encuentra en el periodo inicial, momento en el que debemos calcular el valor de todos los capitales, no debe realizarse ninguna operación. En el resto de capitales, su actualización será:

$$\frac{a_1}{(1+i_1)};\frac{a_2}{(1+i_1)(1+i_2)};\frac{a_3}{(1+i_1)(1+i_2)(1+i_3)};\ldots$$
$$\frac{a_{n-1}}{(1+i_1)(1+i_2)(1+i_3)\ldots(1+i_{n-1})};\frac{a_n}{(1+i_1)(1+i_2)(1+i_3)\ldots(1+i_{n-1})(1+i_n)}$$

Dado que la renta es la suma de todos sus capitales en el mismo periodo de tiempo, que en el caso que nos ocupa es el inicial, el valor actual de la renta que representaremos por $(V_a)_{n/i}$ será la suma de todos los valores anteriormente calculados:

$$(V_a)_{n/i} = a_0 + \frac{a_1}{(1+i_1)} + \frac{a_2}{(1+i_1)(1+i_2)} + \frac{a_3}{(1+i_1)(1+i_2)(1+i_3)} + \ldots$$
$$\frac{a_{n-1}}{(1+i_1)(1+i_2)(1+i_3)\ldots(1+i_{n-1})} + \frac{a_n}{(1+i_1)(1+i_2)(1+i_3)\ldots(1+i_{n-1})(1+i_n)}$$

Para el caso de que se desee calcular el valor final de la renta en el momento t_n, que simbolizaremos como $(V_f)_{n/i}$, debería realizarse la operación de capitalización para cada uno de los términos en función del periodo en el que se encuentren y del tipo de interés aplicable:

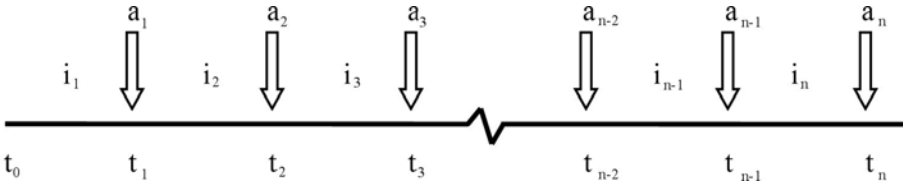
$$a_0(1+i_1)(1+i_2)(1+i_3)\ldots(1+i_n); a_1(1+i_2)(1+i_3)\ldots(1+i_n);\ldots$$
$$a_{n-2}(1+i_{n-1})(1+i_n); a_{n-1}(1+i_n); a_n$$

$$(V_f)_{n/i} = a_0(1+i_1)(1+i_2)(1+i_3)\ldots(1+i_n) + a_1(1+i_2)(1+i_3)\ldots(1+i_n) + \ldots$$
$$a_{n-2}(1+i_{n-1})(1+i_n) + a_{n-1}(1+i_n) + a_n$$

Debe tenerse en cuenta a qué momento temporal se asocia cada uno de

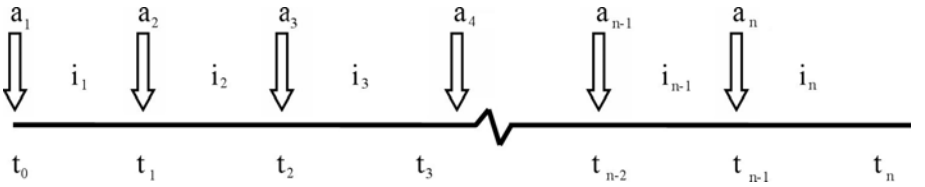
los capitales que constituyen la renta, pues eso determinará el valor de cada uno de ellos en el momento inicial o final afectando al valor de la renta total.

En función del esquema que presente la renta puede denominársele como renta prepagable o postpagable. Analicemos en primer lugar la segunda:



Así, puede observarse que la distribución de los periodos t_x son los mismos, pero las cuantías a_x se asocian a distintos periodos, de tal forma que al periodo t_0-t_1 le corresponde el capital a_1; al periodo siguiente t_1-t_2 te corresponde el capital a_2; y así sucesivamente. Ello supone que el importe de cada una de las cuantías se pagan al final de cada periodo una vez que éste ha transcurrido. Es por ello por lo que se le denomina renta postpagable.

Por el contrario, la renta prepagable presentará el siguiente esquema:



Obsérvese que el valor de cada uno de los capitales es el mismo, es decir, a_1, a_2, a_3, a_4, a_{n-1} y a_n. Lo que difiere es el momento en que se reciben o se pagan, siendo al comienzo de cada periodo.

De la combinación de valores que pueden darse a cada uno de los capitales, a los tipos de interés aplicado a cada periodo, así como el número de periodos que compongan la renta surgen distintos tipos de rente, de las cuales trataremos las recogidas en los siguientes epígrafes.

2.2. Tipos de rentas

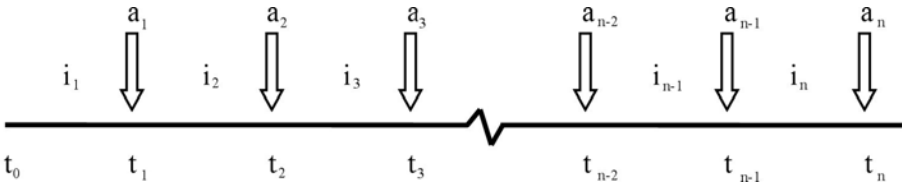
2.2.1. Renta unitaria, temporal y postpagable para un tipo de interés constante

Aquellas rentas cuyos capitales sean iguales a la unidad, siendo, por tanto, iguales entre sí, se denominarán unitarias:

$$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots a_{n-1} = a_n = 1$$

Serán rentas temporales todas aquellas rentas que tengan un número determinado de capitales, independientemente de la cifra.

Como se ha visto en el epígrafe introductorio, al ser rentas postpagables, cada uno de los capitales se transferirán al final del periodo al que se asocie mediante el esquema:



El tipo de interés será constante cuando, independientemente de su valor, sea el mismo en cada uno de los periodos, es decir:

$$i_1 = i_2 = i_3 = \ldots i_{n-1} = i_n$$

2.2.1.1. Valor actual de la renta unitaria postpagable

¿Cómo se puede calcular el valor actual de una renta de este tipo?

En primer lugar debe constatarse que, al tratarse de una renta unitaria la simbología correcta para el valor actual es $a_{n/i}$. Cuando no sea una renta unitaria se utilizará la simbología ya descrita anteriormente $(V_0)_{n/i}$.

Lo más habitual es que para responder a esta pregunta se copie la siguiente formula y se sustituyan los términos sin ningún tipo de razonamiento lógico:

$$a_{n/i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Pero ello llevará a confusiones en la interpretación de los problemas planteados, siendo necesaria la comprensión de dicha fórmula,

comprendiendo su origen desde el principio.

Al tratarse de una renta unitaria con un tipo de interés constante, para hallar su valor actual, en función de los razonamientos anteriores, tendremos:

$$a_{n/i} = \frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \ldots \frac{1}{(1+i)^{n-1}} + \frac{1}{(1+i)^n}$$

Recuérdese que cada $a_x=1$ al tratarse de una renta unitaria.

Ponga el lector especial atención a la fórmula anterior. ¿Observa una constancia? ¿Aprecia que cada sumando el denominador aumenta, y que ese aumento consiste en que el exponente es uno más que el anterior?

Aclárese la fórmula expresándola de otra manera:

$$a_{n/i} = \frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)(1+i)} + \frac{1}{(1+i)(1+i)(1+i)} + \ldots \frac{1}{(1+i)(1+i)(1+i)\ldots \text{"}n\text{"} \text{ veces}}$$

En este punto muchos profesores y libros afirman que nos encontramos en una renta de progresión geométrica, es decir, se tiene una renta unitaria que va creciendo paulatinamente en la misma constante, lo que se traduce en que cada capital (en este caso de valor 1) es el capital anterior multiplicado por *r*. A esta *r* la denominamos razón. El valor de esa *r* en el caso que nos ocupa es:

$$\frac{1}{(1+i)}$$

O lo que es lo mismo, un capital será el capital anterior dividido entre $1+i$.

Ya que cada capital crece en esa proporción respecto al anterior, y es lo que produce que el exponente aumente en uno en cada sumando hasta llegar al último que se simboliza con *n*.

Hasta aquí todo correcto si no fuera por el hecho de que cuando el profesor explica este asunto lo hace como una progresión geométrica aplicando después la fórmula de regresión geométrica.

No importa qué formula se aplique pues el resultado es el mismo y se

llega a la misma conclusión como se demostrará en los dos epígrafes posteriores.

Sin embargo, este hecho es un dato que puede llevar a confundir al alumno, quien está obligado a creer lo que dice el profesor quien, posiblemente, tampoco lo entiende.

2.2.1.1.a. Razonamiento de la progresión geométrica

Se dice que a_n es una progresión geométrica su el conciente entre cada término y el inmediatamente anterior es constante.

Así, por ejemplo: 1,2,4,8,16, ..., un capital cualquiera de ellos entre el inmediatamente anterior siempre da 2, es decir, 16/8=2, 8/4=2, 4/2=2. Por lo que la constante es 2 y se la denomina razón o *r*.

Así, tendremos para cualquier progresión geométrica que:

$$a_1 = a1$$

$$a_2 = a_1 r$$

$$a_3 = a_2 r = a_1 rr = a_1 r^2$$

$$a_4 = a_3 r = a_1 r^2 r = a_1 r^3$$

$$a_5 = a_4 r = a_1 r^3 r = a_1 r^4$$

Puede observarse la fórmula general:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

Supongamos cualquier otro término, tal como:

$$a_k = a_1 r^{k-1}$$

Debe probarse que la fórmula anterior es válida, de tal forma que el término posterior será:

$$a_k r = a_1 r^{k-1} r$$

Es decir:

$$a_{k+1} = a_1 r^{k-1+1}$$

Y así queda demostrado. Esta fórmula será útil para conocer el valor de cualquier capital sabiendo que la razón es:

$$r = \frac{1}{1+i}$$

Todo esto es válido para el siguiente epígrafe de la regresión geométrica. A partir de este párrafo el razonamiento difiere.

Si se quiere conocer el valor de la suma de todos los términos, lo simbolizaremos como S_n, y será igual a:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots a_n$$

Multipliquemos la igualdad anterior por *r*, de tal forma que:

$$rS_n = a_1 r + a_2 r + a_3 r + a_4 r + \ldots a_n r$$

Ahora restemos ambas operaciones, con lo que se mantiene la igualdad, es decir:

$$rS_n - S_n = -a_1 + a_1 r - a_2 + a_2 r - a_3 + a_3 r - a_4 \ldots + a_{n-1} r - a_n + a_n r$$

¿Lioso? No lo es tanto. Lo único que se ha obtenido es la resta del valor de S_n menos el valor de S_{n-1}, y ahora planteo al lector la siguiente pregunta.: ¿por qué se han juntado los valores a_x por el del término anterior multiplicado por la razón? Planteo la pregunta de otra manera: ¿por qué se han juntado $a_1 r$ con $-a_2$, $a_2 r$ con $-a_3$, $a_3 r$ con $-a_4$ y $a_{n-1} r$ con $-a_n$? La respuesta es bien simple, pues son el mismo valor. Recuérdese que estamos en una progresión geométrica en la que el valor de un término es igual al anterior por *r*. De esta forma, las operaciones citadas se anulan quedando:

$$rS_n - S_n = a_n r - a_1$$

Así pues, sacando factor común:

$$S_n(r-1) = a_n r - a_1$$

Por tanto:

$$S_n = \frac{a_n r - a_1}{r-1}$$

Bien, conocemos los valores de los capitales a_1 y a_n actualizados según el tipo de interés, siendo una renta unitaria:

$$a_n = \frac{1}{(1+i)^n} = (1+i)^{-n}$$

$$a^1 = \frac{1}{1+i} = (1+i)^{-1}$$

También sabemos que:

$$r = \frac{1}{(1+i)} = (1+i)^{-1}$$

Por lo que sustituyendo estos valores en la fórmula inicial y sacando factor común:

$$a_{n/i} = \frac{(1+i)^{-n}(1+i)^{-1} - (1+i)^{-1}}{\frac{1}{(1+i)} - 1} = \frac{(1+i)^{-1}\left[(1+i)^{-n} - 1\right]}{\frac{-i}{1+i}}$$

Operando la fracción de abajo:

$$a_{n/i} = \frac{(1+i)^{-1}\left[(1+i)^{-n} - 1\right](1+i)}{-i} = -\frac{-1+(1+i)^{-n}}{i}$$

Se opera el signo negativo y se obtiene la fórmula definitiva para calcular el valor actual de una renta:

$$a_{n/i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Veamos el razonamiento en función de la regresión geométrica.

2.2.1.1.b. Razonamiento de la regresión geométrica

Al igual que en la progresión aritmética, sabemos que:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots a_n$$

A continuación, multipliquemos cada término por *r*:

$$S_n r = a_1 r + a_2 r + a_3 r + a_4 r + \ldots a_n r$$

Procedamos a restar ambas ecuaciones. Sin embargo, debe prestarse especial atención pues, al contrario que en la progresión geométrica la ecuación multiplicada por *r* será inferior a la original, pues *r* es menor a uno tratándose de una regresión. De esta forma:

$$S_n - S_n r = a_1 + a_2 - a_1 r + a_3 - a_2 r + \ldots a_n - a_{n-1} r - a_n r$$

Como ocurría en el caso anterior, a_2 es el resultado de dividir a_1 entre la razón *r*, por lo que todos los términos medios se anularán salvo a_1 y a_n/r, de tal forma que quedará:

$$S_n(1 - r) = a_1 - a_n r$$

$$S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1 - r}$$

Puesto que conocemos que:

$$r = \frac{1}{1+i} = (1+i)^{-1}$$

Y también conocemos los valores actuales de a_1 y a_n en el momento actual sabiendo que son unitarias:

$$a_1 = \frac{1}{1+i} = (1+i)^{-1}$$

$$a_n = \frac{1}{(1+i)^n} = (1+i)^{-n}$$

Obtendremos lo siguiente:

$$a_{n/i} = \frac{(1+i)^{-1} - (1+i)^{-n}(1+i)^{-1}}{1-(1+i)^{-1}} = \frac{(1+i)^{-1}\left[1-\left((1+i)^{-n}\right)\right]}{1-\frac{1}{1+i}} =$$

$$\frac{(1+i)^{-1}\left[1-(1+i)^{-n}\right]}{\frac{i}{1+i}} = \frac{(1+i)^{-1}(1+i)\left[1-(1+i)^{-n}\right]}{i}$$

Obteniéndose la fórmula final:

$$a_{n/i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

2.2.1.2. Valor final de la renta unitaria postpagable

En este caso el razonamiento es el mismo, debiendo partir nuevamente de la fórmula de progresión o regresión geométrica. Ya no se considera necesario demostrar que en ambos casos el resultado será el mismo, por lo que tomaremos la segunda:

$$S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1-r}$$

La razón *r* sigue teniendo el mismo valor que en los casos anteriores. Sin embargo, los valores de a_1 y a_n, siendo unitarios, deben capitalizarse al momento final *n*, pues es en ese instante donde se quiere obtener el valor de la renta. Así, recuérdese el planteamiento esquemático de la renta postpagable. El primer capital se encuentra en el momento t_1, lo que supone que desde ese instante hasta el final pasarán *n* periodos excepto el primero. Por otro lado, el último capital se cobra en el último periodo, por lo que no tiene que actualizarse siendo su valor la unidad:

$$a_1 = (1+i)^{n-1}$$

$$a_n = a_n$$

De esta forma tendremos que el valor final, que simbolizaremos como $S_{n/i}$ será:

$$S_{n/i} = \frac{(1+i)^{n-1} - 1(1+i)^{-1}}{\frac{i}{(1+i)}} = \frac{(1+i)\left[(1+i)^{n-1} - (1+i)^{-1}\right]}{i}$$

Al resolver esta ecuación se obtiene la fórmula final:

$$S_{n/i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

2.2.2. Renta no unitaria, constante, temporal y postpagable para un tipo de interés constante

En este caso la demostración sería la misma. De hecho, al haberla calculado para la renta unitaria no sería necesario volver a hacerlo para una renta no unitaria. No obstante, a continuación se indica el caso del valor actual:

$$(V_a)_{n/i} = \frac{a(1+i)^{-1} - a(1+i)^{-n}(1+i)^{-i}}{1-(1+i)^{-1}} = \frac{a(1+i)^{-1}\left[1-(1+i)^{-n}\right]}{\frac{i}{1+i}} =$$

$$(V_a)_{n/i} = \frac{a(1+i)^{-1}\left[1-(1+i)^{-n}\right](1+i)}{i} = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Y dado que sabemos el valor de $a_{n/i}$:

$$a_{n/i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \rightarrow (V_a)_{n/i} = aa_{n/i}$$

El proceso para el cálculo del valor final de una renta no unitaria es el mismo. Lo dejo al lector para que la desarrolle si lo desea. Así, la fórmula será la siguiente:

$$(V_f)_{n/i} = aS_{n/i} = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

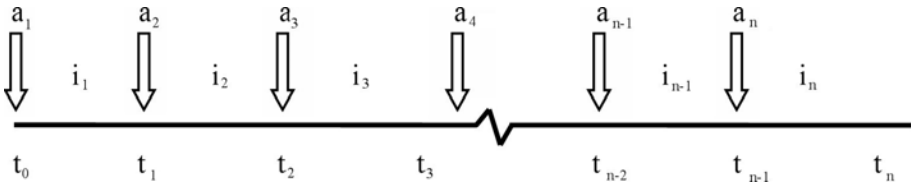
2.2.3. Renta unitaria, temporal y prepagable para un tipo de interés constante

2.2.3.1. Valor inicial de la renta unitaria prepagable

El razonamiento de la renta prepagable es el mismo que en el caso de la postpagable, sabiendo que se trata igualmente de una regresión geométrica de razón:

$$r = \frac{1}{1+i}$$

La única diferencia existente es que el pago de los capitales se realiza al comienzo de cada periodo y no al final. Recuérdese que gráficamente el planteamiento es el siguiente:



Así, como en cualquier otra renta de regresión geométrica, la suma de todos sus capitales será:

$$S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1-r}$$

La única diferencia que se encuentra es el valor de a_1 y de a_n en el

momento actual, ya que el capital del primer año se paga en el momento *0* por lo que no tiene que actualizarse y será la propia unidad, y en el caso del último capital que se paga al comienzo del último periodo, sera:

$$a_n = \frac{a}{(1+i)^{n-1}}$$

Con todo ello, se tendrá:

$$a_{n/i} = \frac{1-(1+i)^{-n+1}(1+i)^{-1}}{1-\frac{1}{(1+i)}} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{\frac{i}{(1+i)}} = \frac{\left[1-(1+i)^{-n}\right](1+i)}{i} =$$

$$a_{n/i} = (1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Y así se obtiene la fórmula para calcular el valor inicial de la renta unitaria prepagable con tipo de interés constante.

2.2.3.2. Valor final de la renta unitaria postpagable

Con el mismo razonamiento y el siguiente valor capitalizado de los capitales a_1 y a_n, sabiendo que se trata de una renta prepagable y queremos hallar la fórmula para el cálculo de su valor final:

$$a_1 = (1+i)^n$$

$$a_n = (1+i)$$

Por lo que, a partir de la fórmula demostrada de la suma de la renta:

$$S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1-r}$$

$$S_{n/i} = \frac{(1+i)^n - (1+i)(1+i)^{-1}}{1 - \frac{1}{(1+i)}} = \frac{\left[(1+i)^n - 1\right](1+i)}{i}$$

Así, obtenemos la fórmula del valor final de una renta unitaria prepagable:

$$S_{n/i} = (1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

2.2.4. Renta no unitaria y constante, temporal y prepagable para un tipo de interés constante

En estos casos, el razonamiento es el mismo como se ha demostrado en el epígrafe 2.2., por lo que no se considera necesario volver a demostrarlo, de tal forma que:

$$(V_a)_{n/i} = aa_{n/i} = a(1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$(V_f)_{n/i} = aS_{n/i} = a(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

2.2.5. Rentas perpetuas

Adquieren este calificativo todas aquellas rentas cuyos capitales son determinados, a un tipo de interés concreto pero por un número indefinido de periodos, por lo que *n* es incierto, no existiendo un último periodo, sino que éste tiende a infinito.

Así, partiendo de los razonamientos lógicos anteriormente planteados, para una renta unitaria, postpagable y con un tipo de interés constante, conocemos que su valor inicial es:

$$a_{n/i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Dado que $n=\infty$, entonces entra en juego el concepto de límite, pues:

$$a_{\infty/i} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{1-\frac{1}{(1+i)^{\infty}}}{i} = \frac{1-\frac{1}{\infty}}{i} = \frac{1-0}{i}$$

Así, por tanto, sabemos que el valor actual de una renta perpetua postpagable es:

$$a_{\infty/i} = \frac{1}{i}$$

No existe valor final de la renta pues, como se ha dicho, el número de periodos es infinito y, por tanto, no hay un último periodo en el cuál proceder al cálculo.

En el caso de tratarse de una renta no unitaria y constante, perpetua y con un tipo de interés constante, tendremos:

$$(V_0)_{\infty/i} = a a_{\infty/i} = a\frac{1}{i}$$

Si, por otro lado, se trata de una renta perpetua, unitaria y prepagable, el razonamiento es el mismo:

$$a_{\infty/i} = \lim_{n\to\infty}(1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = (1+i)\frac{1-\frac{1}{(1+i)^{\infty}}}{i} = (1+i)\frac{1-\frac{1}{\infty}}{i}$$

Por tanto:

$$a_{\infty/i} = (1+i)\frac{1}{i}$$

Por último, en caso de que se trate de una renta no unitaria constante, prepagable y perpetua, el razonamiento será el mismo dejando a la libre decisión del lector demostrarlo por sí mismo, no considerándose ya necesario en este manual:

$$(V_0)_{\infty/i} = a a_{\infty/i} = a(1+i)\frac{1}{i}$$

2.2.6. Rentas ciertas de cuantía variable según una progresión aritmética, postpagable, con tipo de interés constante

Este tipo de rentas son aquéllas cuyos capitales aumentan en cada periodo en una misma cuantía. De esta forma:

$$a_1 = a$$

$$a_2 = a_1 + d = a + d$$

$$a_3 = a_2 + d = a + d + d = a + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = a + 2d + d = a + 3d$$

...

$$a_n = a_{n-1} + d = a + (n-1)d$$

Debe demostrarse que esta fórmula es válida para cualquier a_k. Así, supongamos cualquier número tal que:

$$a_k = a + (k-1)d$$

Por tanto, el siguiente capital será:

$$a_{k+1} = a + \left[(k+1) - 1\right]d = a + kd$$

Y así queda demostrado que la fórmula es válida para cualquier capital.

En este punto no debe confundirse el hecho de que los valores de cada

uno de los capitales *a* siguen una progresión aritmética con el otro hecho de que dichos capitales siguen, a su vez, una regresión geométrica. De esta forma, el planteamiento es el siguiente:

$$(V_{a,d})_{n/i} = \frac{a}{(1+i)} + \frac{a+d}{(1+i)^2}\frac{a+2d}{(1+i)^3}\frac{a+3d}{(1+i)^4}\ldots\frac{a+(n-1)d}{(1+i)^n}$$

Con el objetivo de simplificar las operaciones, realicemos la siguiente igualdad:

$$V = \frac{1}{1+i}$$

Por lo que la operación anterior quedará:

$$(V_{a,d})_{n/i} = aV + (a+d)V^2 + (a+2d)V^3 + (a+3d)V^4 \ldots \left[a+(n-1)d\right]V^n$$

Multipliquemos a continuación ambos miembros por V.

$$V(V_{a,d})_{n/i} = aV^2 + (a+d)V^3 + (a+2d)V^4 + \ldots \left[a+(n-1)d\right]V^{n+1}$$

Si restamos esta expresión a la anterior:

$$(V_{a,d})_{n/i} - V(V_{a,d})_{n/i} = aV + (a+d)V^2 - aV^2 +$$
$$+ (a+2d)V^3 - (a+d)V^3 + (a+3d)V^4 - (a+2d)V^4 +$$
$$\ldots\left[a+(n-2)d\right]V^n - \left[a+(n-1)d\right]V^n + \left[a+(n-1)d\right]V^{n+1}$$

$$(V_{a,d})_{n/i} - V(V_{a,d})_{n/i} = aV + (a+d-a)V^2 +$$
$$+ (a+2d-a-d)V^3 + (a+3d-a-2d)V^4 +$$
$$\ldots\left[a+(n-2)d-a-(n-1)d\right]V^n - \left[a+(n-1)d\right]V^{n+1}$$

$$(V_{a,d})_{;n/i}(1-V) = aV + dV^2 + dV^3 + \ldots dV^n - \left[a+(n-1)d\right]V^{n+1} =$$

Operando el último sumando:

$$= aV + dV^2 + dV^3 + \ldots dV^n - aV^{n+1} - ndV^{n+1} + dV^{n+1}$$

Recordemos el valor de V:

$$V = \frac{1}{1+i} \rightarrow \left(1 - V\right) = 1 - \frac{1}{1+i} = i\frac{1}{1+i} = iV$$

Recordemos también el valor actual de una renta unitaria, postpagable de interés constante:

$$a_{n/i} = \frac{1 - \left(1+i\right)^{-n}}{i}$$

La cual era igual que:

$$\frac{1}{\left(1+i\right)} + \frac{1}{\left(1+i\right)^2} + \frac{1}{\left(1+i\right)^3} + \ldots \frac{1}{\left(1+i\right)^n} = V + V^2 + V^3 + \ldots V^n$$

De esta misma forma:

$$V^n = \left(1+i\right)^{-n} = \frac{1}{\left(1+i\right)^{-n}}$$

Por lo que de la fórmula del valor inicial de la renta unitaria postpagable se obtiene:

$$a_{n/i} = \frac{1 - \left(1+i\right)^{-n}}{i} = \frac{1 - V^n}{i}$$

Así, volviendo a la fórmula anterior y sustituyendo:

$$V_{(a,d);n/i}\left(1-V\right)=aV\left(1-V^{n}\right)+dV\left(V+V^{2}+V^{3}+\ldots V^{n}\right)-ndV^{n+1}$$

$$V_{(a,d);n/i}iV=aV\left(1-V^{n}\right)+dVa_{n/i}-ndV^{n+1}$$

$$V_{(a,d);n/i}=\frac{aV\left(1-V^{n}\right)+dVa_{n/i}-ndV^{n+1}}{iV}$$

$$V_{(a,d);n/i}=\frac{aV\left(1-V^{n}\right)}{iV}+\frac{dVa_{n/i}}{iV}-\frac{ndV^{n+1}}{iV}$$

$$V_{(a,d);n/i}=\frac{a\left(1-V^{n}\right)}{i}+\frac{da_{n/i}}{i}-\frac{ndV^{n}}{i}$$

$$V_{(a,d);n/i}=aa_{n/i}+\frac{da_{n/i}}{i}-\frac{nd}{i}V^{n}$$

$$V_{(a,d);n/i}=\left(a+\frac{d}{i}\right)a_{n/i}-\frac{nd}{i}V^{n}$$

Por último, si en el segundo miembro sumamos y restamos *nd/i*, manteniendo la igualdad, obtenemos:

$$V_{(a,d);n/i}=\left(a+\frac{d}{i}\right)a_{n/i}-\frac{nd}{i}V^{n}+\frac{nd}{i}-\frac{nd}{i}$$

$$V_{(a,d);n/i}=\left(a+\frac{d}{i}\right)a_{n/i}-\frac{nd}{i}\left(V^{n}-1\right)-\frac{nd}{i}$$

$$V_{(a,d);n/i}=\left(a+\frac{d}{i}\right)a_{n/i}+\frac{nd}{i}\left(1-V^{n}\right)-\frac{nd}{i}$$

$$V_{(a,d);n/i}=\left(a+\frac{d}{i}\right)a_{n/i}+nd\frac{\left(1-V^{n}\right)}{i}-\frac{nd}{i}$$

$$V_{(a,d);n/i}=\left(a+\frac{d}{i}\right)a_{n/i}+nda_{n/i}-\frac{nd}{i}$$

$$V_{(a,d);n/i}=\left(a+\frac{d}{i}+nd\right)a_{n/i}-\frac{nd}{i}$$

Así, se ha obtenido la fórmula de una renta en progresión aritmética, con tipo de interés constante y temporal:

$$V_{(a,d);n/i} = \left(a + \frac{d}{i} + nd \right) a_{n/i} - \frac{nd}{i}$$

A partir de esta misma fórmula se puede obtener el valor final del mismo tipo de renta, simplemente con la operación de capitalización de los *n* periodos. De esta forma:

$$S_{(a,d);n/i} = (1+i)^n V_{(a,d);n/i} = (1+i)^n \left[a_{n/i} \left(a + \frac{d}{i} + nd \right) - \frac{nd}{i} \right]$$

Así, resolviendo la ecuación, recordando que:

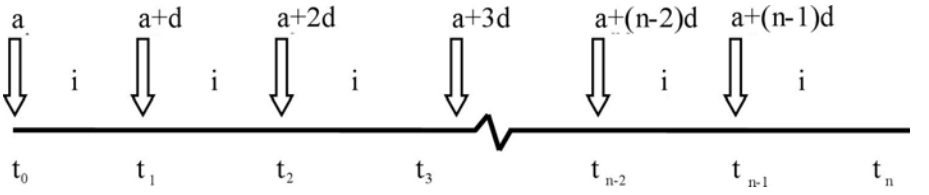
$$S_{n/i} = a_{n/i} (1+i)^n$$

Se tiene:

$$S_{(a,d);n/i} = S_{n/i} \left(a + \frac{d}{i} + nd \right) - (1+i)^n \frac{nd}{i}$$

2.2.7. Rentas ciertas de cuantía variable según una progresión aritmética, prepagable, con tipo de interés constante

En este caso el razonamiento sería el mismo. Lo único que variaría serían los valores de cada uno de los capitales para el momento de su actualización en el caso del cálculo del valor inicial, ya que su pago se encontraría al principio de cada periodo siguiendo el siguiente planteamiento:



Así, comparemos el valor inicial de la renta en progresión aritmética postpagable y la prepagable. Mientras que en el primer caso teníamos:

$$(V_{a,d})_{n/i} = \frac{a}{(1+i)} + \frac{a+d}{(1+i)^2} + \frac{a+2d}{(1+i)^3} + \ldots \frac{a+(n-1)d}{(1+i)^n}$$

en el caso de la prepagable será:

$$(V^*_{a,d})_{n/i} = a + \frac{a+d}{(1+i)} + \frac{a+2d}{(1+i)^2} + \frac{a+3d}{(1+i)^3} + \ldots \frac{a+(n-1)d}{(1+i)^{n-1}}$$

Es por esta razón por la que el razonamiento será el mismo. Recordemos la igualdad:

$$V = \frac{1}{1+i}$$

Por lo que la operación anterior quedará:

$$(V^*_{a,d})_{n/i} = a + (a+d)V + (a+2d)V^2 + (a+3d)V^3 \ldots \left[a+(n-1)d\right]V^{n-1}$$

Multiplicando la expresión por V:

$$V(V^*_{a,d})_{n/i} = aV + (a+d)V^2 + (a+2d)V^3 + \ldots \left[a+(n-1)d\right]V^n$$

Y restándolas:

$$(V^*_{a,d})_{n/i} - V(V^*_{a,d})_{n/i} = a + (a+d)V - aV +$$
$$+ (a+2d)V^2 - (a+d)V^2 + (a+3d)V^3 - (a+2d)V^3 +$$
$$\ldots \left[a+(n-2)d\right]V^{n-1} - \left[a+(n-1)d\right]V^{n-1} + \left[a+(n-1)d\right]V^n$$

$$(V^*_{a,d})_{n/i} - V(V^*_{a,d})_{n/i} = a + (a+d-a)V +$$
$$+ (a+2d-a-d)V^2 + (a+3d-a-2d)V^3 +$$
$$\ldots \left[a+(n-2)d-a-(n-1)d\right]V^{n-1} - \left[a+(n-1)d\right]V^n$$

$$(V*_{a,d})_{;n/i}(1-V) = a + dV + dV^2 + \ldots dV^{n-1} - \left[a + (n-1)d\right]V^n =$$

$$= a + dV + dV^2 + \ldots dV^{n-1} - aV^n - ndV^n + dV^n$$

Recordemos el valor de V:

$$V = \frac{1}{1+i} \rightarrow (1-V) = 1 - \frac{1}{1+i} = i\frac{1}{1+i} = iV$$

Recordemos también el valor actual de una renta unitaria, prepagable de interés constante es:

$$a_{n/i} = (1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

La cual era igual que:

$$1 + \frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \ldots \frac{1}{(1+i)^{n-1}} = 1 + V + V^2 + \ldots V^{n-1}$$

De esta misma forma:

$$V^{n-1} = (1+i)^{-n+1} = \frac{1}{(1+i)^{n-1}}$$

Por lo que de la fórmula del valor inicial de la renta unitaria prepagable se obtiene:

$$a_{n/i} = (1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = (1+i)\frac{1-V^n}{i}$$

Así, volviendo a la fórmula anterior y sustituyendo:

$$V*_{(a,d);n/i}\left(1-V\right)=a\left(1-V^{n}\right)+dV\left(1+V+V^{2}+\ldots V^{n-1}\right)-ndV^{n}$$

$$V*_{(a,d);n/i}\,iV=a\left(1-V^{n}\right)+dVa_{n/i}-ndV^{n}$$

$$V*_{(a,d);n/i}=\frac{a\left(1-V^{n}\right)+dVa_{n/i}-ndV^{n}}{iV}$$

$$V*_{(a,d);n/i}=\frac{a\left(1-V^{n}\right)}{iV}+\frac{dVa_{n/i}}{iV}-\frac{ndV^{n}}{iV}$$

$$V*_{(a,d);n/i}=\frac{a\left(1-V^{n}\right)}{i}\frac{1}{V}+\frac{da_{n/i}}{i}-\frac{ndV^{n}}{i}\frac{1}{V}$$

$$V*_{(a,d);n/i}=aa_{n/i}\frac{1}{V}+\frac{da_{n/i}}{i}-\frac{nd}{i}V^{n}\frac{1}{V}$$

$$V*_{(a,d);n/i}=\left(a+\frac{d}{i}\right)a_{n/i}\frac{1}{V}-\frac{nd}{i}V^{n}\frac{1}{V}$$

Por último, si en el segundo miembro sumamos y restamos *nd/i*, manteniendo la igualdad, obtenemos:

$$V*_{(a,d);n/i}=\left(a+\frac{d}{i}\right)a_{n/i}\frac{1}{V}-\frac{nd}{i}V^{n}\frac{1}{V}+\frac{nd}{i}-\frac{nd}{i}$$

$$V*_{(a,d);n/i}=\left(a+\frac{d}{i}\right)a_{n/i}\frac{1}{V}-\frac{nd}{i}\left(V^{n}-1\right)\frac{1}{V}-\frac{nd}{i}$$

$$V*_{(a,d);n/i}=\left(a+\frac{d}{i}\right)a_{n/i}\frac{1}{V}+\frac{nd}{i}\left(1-V^{n}\right)\frac{1}{V}-\frac{nd}{i}$$

$$V*_{(a,d);n/i}=\left(a+\frac{d}{i}\right)a_{n/i}\frac{1}{V}+nd\frac{\left(1-V^{n}\right)}{i}\frac{1}{V}-\frac{nd}{i}$$

$$V*_{(a,d);n/i}=\left(a+\frac{d}{i}\right)a_{n/i}\frac{1}{V}+nda_{n/i}\frac{1}{V}-\frac{nd}{i}$$

$$V*_{(a,d);n/i}=\left(a+\frac{d}{i}+nd\right)a_{n/i}\frac{1}{V}-\frac{nd}{i}\frac{1}{V}$$

Recuérdese el valor de *V*:

$$V = \frac{1}{1+i} \rightarrow \frac{1}{V} = 1+i$$

Así, se ha obtenido la fórmula de una renta en progresión aritmética, con tipo de interés constante y temporal:

$$V^*_{(a,d);n/i} = (1+i)\left(a + \frac{d}{i} + nd\right)a_{n/i} - (1+i)\frac{nd}{i}$$

$$V^*_{(a,d);n/i} = (1+i)\left[\left(a + \frac{d}{i} + nd\right)a_{n/i} - \frac{nd}{i}\right]$$

Es decir:

$$V^*_{(a,d);n/i} = (1+i)V_{(a,d);n/i}$$

El valor final de esta renta se obtiene con la simple capitalización de la anterior:

$$S^*_{(a,d);n/i} = (1+i)^n V^*_{(a,d);n/i} = (1+i)^n \left\{(1+i)\left[\left(a + \frac{d}{i} + nd\right)a_{n/i} - \frac{nd}{i}\right]\right\}$$

Es decir:

$$S^*_{(a,d);n/i} = S_{n/i}\left[a + \frac{d}{i} + nd\right] - (1+i)^n \frac{nd}{i}$$

2.2.8. Rentas ciertas de cuantía variable según una progresión geométrica, postpagable, con tipo de interés constante

Según se razonó en el punto 2.2.1.1.*a*, la suma de los *n* términos de una regresión geométrica es:

$$S = \frac{a_1 - a_n r}{1-r}$$

Así, sabiendo que se quiere calcular el valor actual de la renta en progresión geométrica:

$$A_{(a,q);n/i} = \frac{a}{1+i} + \frac{aq}{(1+i)^2} + \frac{aq^2}{(1+i)^3} + \ldots \frac{aq^{n-2}}{(1+i)^{n-1}} + \frac{aq^{n-1}}{(1+i)^n}$$

De lo cual se puede sacar factor común:

$$A_{(a,q);n/i} = \frac{a}{1+i}\left(1 + \frac{q}{1+i} + \frac{q^2}{(1+i)^2} + \ldots \frac{q^{n-1}}{(1+i)^{n-1}}\right)$$

De esta forma, sabiendo el valor de la razón *r*:

$$r = \frac{q}{1+i}$$

Y, además, sabiendo los valores del primer y el último capital actualizados:

$$a_1 = \frac{a}{1+i}; a_n = \frac{aq^{n-1}}{(1+i)^n}$$

Sustituyendo todos los valores en la fórmula anterior:

$$A_{(a,q);n/i} = \frac{\frac{a}{(1+i)} - \frac{aq^{n-1}}{(1+i)^n}\frac{q}{(1+i)}}{1 - \frac{q}{(1+i)}}$$

Resolviendo esta operación sacando factor común:

$$A_{(a,q);n/i} = \frac{a}{(1+i)} \frac{1-\frac{q^n}{(1+i)^n}}{1-\frac{q}{(1+i)}} = \frac{a}{(1+i)} \frac{1-q^n(1+i)^{-n}}{\frac{1+i-q}{(1+i)}} =$$

$$= \frac{a}{(1+i)} \frac{\left[1-q^n(1+i)^{-n}\right](1+i)}{1+i-q} = a \frac{\left[1-q^n(1+i)^{-n}\right]}{1+i-q}$$

Y así se ha obtenido la fórmula para calcular el valor actual de una renta en progresión geométrica postpagable con un tipo de interés constante:

$$A_{(a,q);n/i} = a \frac{\left[1-q^n(1+i)^{-n}\right]}{1+i-q}$$

Para calcular su valor final simplemente se capitalizará el valor inicial:

$$S_{(a,q);n/i} = A_{(a,q);n/i}(1+i)^n = a \frac{\left[1-q^n(1+i)^{-n}\right]}{1+i-q}(1+i)^n =$$

$$= a \frac{\left[1(1+i)^n - q^n(1+i)^{-n}(1+i)^n\right]}{1+i-q} = a \frac{\left[(1+i)^n - q^n\right]}{1+i-q}$$

Habiéndose obtenido la fórmula para el cálculo del valor final:

$$S_{(a,q);n/i} = a \frac{(1+i)^n - q^n}{1+i-q}$$

2.2.9. Rentas ciertas de cuantía variable según una progresión geométrica, prepagable, con tipo de interés constante

El razonamiento es el mismo que el planteado en el epígrafe anterior, variando los valores del primer capital y del último pagados, pues se

pagarían al comienzo de los respectivos periodos. De esta forma:

$$a_1 = a; a_n = \frac{aq^{n-1}}{(1+i)^{n-1}}$$

Sustituyendo todos los valores en la fórmula *S*:

$$A*_{(a,q);n/i} = \frac{a - \frac{aq^{n-1}}{(1+i)^{n-1}} \frac{q}{(1+i)}}{1 - \frac{q}{(1+i)}}$$

Resolviendo la operación:

$$A*_{(a,q);n/i} = a \frac{1 - \frac{q^n}{(1+i)^n}}{1 - \frac{q}{(1+i)}} = a \frac{1 - q^n (1+i)^{-n}}{\frac{1+i-q}{(1+i)}} =$$

$$= a \frac{\left[1 - q^n (1+i)^{-n}\right](1+i)}{1+i-q} = (1+i) a \frac{\left[1 - q^n (1+i)^{-n}\right]}{1+i-q}$$

Y así se ha obtenido la fórmula para calcular el valor actual de una renta en progresión geométrica prepagable con un tipo de interés constante:

$$A*_{(a,q);n/i} = (1+i) a \frac{\left[1 - q^n (1+i)^{-n}\right]}{1+i-q} = A_{(a,q);n/i}(1+i)$$

Para calcular su valor final simplemente se capitalizará el valor inicial:

$$S^*_{(a,q);n/i} = A^*_{(a,q);n/i}\left(1+i\right)^n = \left(1+i\right)a\frac{\left[1-q^n\left(1+i\right)^{-n}\right]}{1+i-q}\left(1+i\right)^n =$$

$$= \left(1+i\right)a\frac{\left[1\left(1+i\right)^n - q^n\left(1+i\right)^{-n}\left(1+i\right)^n\right]}{1+i-q} = \left(1+i\right)a\frac{\left[\left(1+i\right)^n - q^n\right]}{1+i-q}$$

Habiéndose obtenido la fórmula para el cálculo del valor final:

$$S^*_{(a,q);n/i} = \left(1+i\right)a\frac{\left(1+i\right)^n - q^n}{1+i-q} = \left(1+i\right)S_{(a,q);n/i}$$

2.3. Ejercicios resueltos

1.º Calcular el valor actual y final de una renta de 1.000 euros anuales postpagables durante 15 años sabiendo que el tipo de interés efectivo es del 4,5 % anual. ¿Cuál es el valor de la renta en el segundo año?

En este tema hemos deducido lógicamente la fórmula para calcular el valor actual y el valor final de cualquier renta cuando los pagos y el tipo de interés son constantes. De esta forma, el valor actual será:

$$(V_a)_{15/0,045} = a \bullet a_{15/0,045} = a\frac{1-\left(1+i\right)^{-n}}{i}$$

$$(V_a)_{15/0,045} = 1.000 \bullet \frac{1-\left(1+0,045\right)^{-15}}{0,045} = 10.739,55$$

y el valor final:

$$(V_f)_{15/0,045} = a \bullet s_{15/0,045} = a\frac{\left(1+i\right)^n - 1}{i}$$

$$(V_f)_{15/0,045} = 1.000 \bullet \frac{(1+0,045)^{15}-1}{0,045} = 20.784,05$$

El valor de la renta en el segundo año se puede obtener capitalizando dos años el valor actual de la renta al tipo de interés establecido:

$$V_2 = (V_a)_{15/0,045}(1+i)^2 = 10.739,55 \bullet (1,045)^2 = 11.727,86$$

2.º ¿Cuál es el valor actual y final de una renta prepagable de 12.000 euros anuales durante 30 años sabiendo que el tipo de interés efectivo anual es del 1,5 %?

$$(V_a) = 12.000 \bullet (1+0,015) \bullet \frac{1-(1+0,015)^{-30}}{0,015} = 292.512,91$$

$$V_f = 12.000 \bullet (1+0,015) \bullet \frac{(1+0,015)^{30}-1}{0,015} = 457.221,14$$

3.º Cuál es el importe anual de una renta postpagable de 8 años si su valor actual es de 3.000 euros y el tipo de interés anual es del 5,2 %?

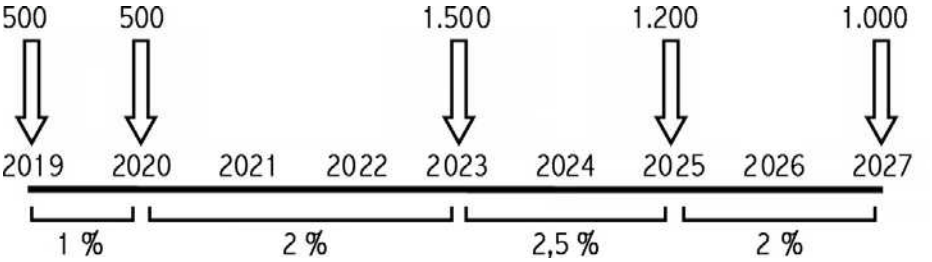
$$V_a = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \Rightarrow a = \frac{V_a \bullet i}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$a = \frac{3.000 \bullet 0,052}{1-(1+0,052)^{-8}} = 467,93$$

Así, el importe anual de la renta es de 467,93 euros.

4.º Calcular el valor de una renta en el año 2019 y en el 2027 cuyos pagos al comenzar los respectivos años son: 500 euros en el año 2019, 500 euros en el año 2020, 1.500 euros en el año 2023, 1.200 euros en el 2025 y 1.000 euros en el año 2027. Se sabe que el tipo de interés anual para cada año es: i_{19}=1 %, i_{20}=i_{21}=i_{22}= 2 %, i_{23}=i_{24}=2,5 %, i_{25}=i_{26}= 2 %.

Es importante comprender el problema para lo que puede resultar muy útil una línea temporal:



Recuérdese la fórmula de actualización general del primer tema:

$$V_0 = \frac{a}{(1+i)^n}$$

Dado que en este caso el valor actual de la renta es la suma de los pagos actualizados individualmente, tendremos:

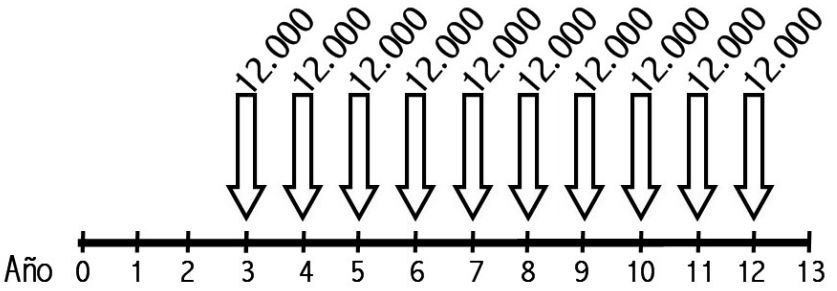
$$V_0 = 500 + \frac{500}{(1+0{,}01)} + \frac{1.500}{(1+0{,}01)(1+0{,}02)^3} +$$
$$+ \frac{1.200}{(1+0{,}01)(1+0{,}02)^3(1+0{,}025)^2} +$$
$$+ \frac{1.000}{(1+0{,}01)(1+0{,}02)^3(1+0{,}025)^2(1+0{,}02)^2} =$$
$$= 4.313{,}73\, euros$$

Para calcular el valor final es suficiente con capitalizar el valor actual obtenido:

$$V_{27} = 4.313,73(1,01)(1,02)^3(1,025)^2(1,02)^2 = 5.0563,86$$

5.º Suponga ahora una renta de 12.000 euros anuales pero que en los dos primeros años no se cobra nada, cobrándose el primer pago al comienzo del tercer año durante 10 años consecutivos y todos al mismo tipo de interés, un 1,5 % anual. Calcular el valor de la renta en el año 0 y en el año 13.

El esquema de la renta será muy útil para la visualización de los pagos, como ocurría en el ejercicio anterior:



Puede observarse que a partir del año segundo se trata de una renta de pagos constantes y tipo de interés constante, por lo que calcularemos el valor inicial en el año 2 de dicha renta siendo postpagable:

$$V_2 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 12.000 \bullet \frac{1-(1+0,015)^{-10}}{0,015} = 110.666,21$$

Pero éste no es el resultado, ya que debemos calcular el valor de la renta en el año 0 y ese valor es en el año 2, por lo que debemos actualizarlo:

$$V_0 = \frac{V_2}{(1+i)^2} = \frac{110666,21}{1,015^2} = 107.419,46$$

El valor en el año 13 de la renta se puede calcular con la simple capitalización del valor anterior:

$$V_{13} = 107.419,46 \bullet (1,015)^{13} = 130.359,15$$

O, como segundo método, aplicando directamente la fórmula del valor final de una renta prepagable de 10 pagos:

$$V_{13} = a(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$V_{13} = 12.000 \bullet (1+0,015) \bullet \frac{(1+0,015)^{10} - 1}{0,015} = 130.359,15$$

6.ºUn matrimonio quiere comprar una casa. Para el pago dentro de tres años de la entrada por valor de 75.000 euros deciden contratar un fondo con aportaciones mensuales iguales durante tres años cuya remuneración es del 1,5 % anual. ¿Cuál debe ser el importe de las aportaciones mensuales para poder cubrir la entrada?

El fondo tiene como finalidad tener el importe de la entrada al cabo de tres años, y dicho fondo consiste en la aportación mensual de una cantidad de dinero, siempre la misma durante ese mismo periodo. En primer lugar, al estar hablando de periodos mensuales y contar con el tipo de interés anual, debemos calcular el interés mensual para facilitar los cálculos:

$$(1+i_m)^{12} = 1 + 0,015 \Rightarrow i_m = \sqrt[12]{1,015} - 1 = 0,001241488$$

Dado que en el momento de la contratación del fondo debe realizarse la primera aportación, podemos tratarlo como una renta prepagable de 36 mensualidades, y puesto que queremos conocer el valor de cada pago para tener al cabo de los tres años 75.000 euros, se trata del valor final de la renta:

$$S_{36} = a(1+i_m)\frac{(1+i_m)^n - 1}{i_m}$$

$$75.000 = a \bullet (1,00124) \bullet \frac{1,00124^{36} - 1}{0,00124} \Rightarrow a = 2.035,89$$

7.º Un matrimonio quiere realizar una reforma en su casa en el plazo de 10 años. El coste estimado de dichas obras es de 1.000.000 de euros. Con el fin de obtener dicha cuantía decide contratar un fondo al que debe aportar un capital anual igual, y se encuentra remunerado al 4 %. ¿Qué importe es el que deben aportar anualmente?

Como todo fondo, las aportaciones anuales comienzan en el momento de la contratación, por lo que se trata de una renta prepagable. Las aportaciones anuales las desconocemos pero son iguales, y el tipo de interés es constante, y sabemos que el matrimonio quiere obtener un total de 1.000.000 de euros al final de los 10 años. Por tanto, tenemos:

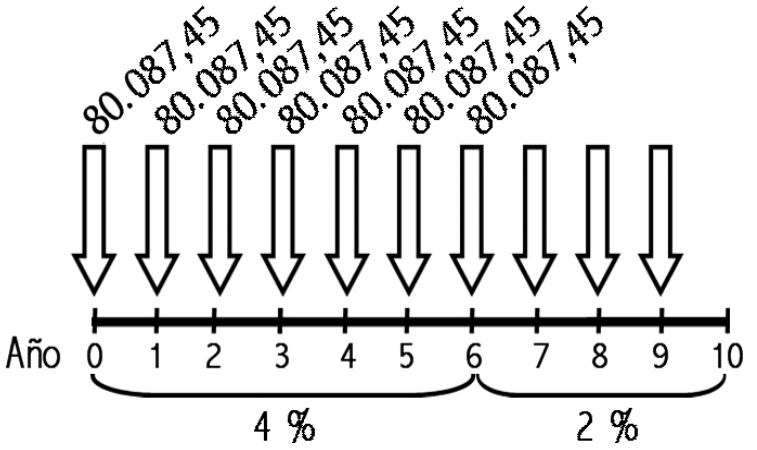
$$(V_f)_{10} = a(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$1.000.000 = a \bullet (1+0{,}04) \bullet \frac{(1+0{,}04)^{10} - 1}{0{,}04}$$

$$a = \frac{1.000.000 \bullet 0{,}04}{(1+0{,}04) \bullet \left[(1+0{,}04)^{10} - 1\right]} \Rightarrow a = 80.087{,}45$$

Las aportaciones anuales del matrimonio deben ser de 80.087,45 euros.

Resulta que a partir del sexto año la entidad financiera reduce la remuneración al 2 %. ¿Cuál será la aportación nueva que debe realizar el matrimonio anualmente?



En primer lugar debemos conocer el valor final de las aportaciones realizadas por el matrimonio. Así, dado que es en el sexto año cuando cambian el tipo de interés y que el pago se realiza al comienzo, eso supone que deberemos entender que el sexto año la aportación se realizará al 2 % como se muestra en el esquema cronológico pero el capital aportado será de 80.087,45 euros también.

Así, para conocer el valor final de la renta aportada hasta el cambio del tipo de interés, es decir, en el año 6.º, tendremos una renta prepagable a lo que habrá que sumar el último capital aportado:

$$(V_f)_6^1 = 80.087{,}45 + 80.087{,}45 \bullet (1 + 0{,}04) \bullet \frac{(1 + 0{,}04)^6 - 1}{0{,}04}$$

$$(V_f)_6^1 = 632.554{,}26$$

Sin embargo, necesitamos conocer el valor de la renta al final de los 10 años, por lo que el valor anterior lo capitalizamos:

$$(V_f)_{10}^1 = (V_f)_6 (1 + 0{,}02)^4 = 632.554{,}26 \bullet 1{,}02^4 = 684.697{,}07$$

El valor final de las tres aportaciones pendientes al 2 % será:

$$(V_f)_{10}^2 = C'(1 + 0{,}02)\frac{(1 + 0{,}02)^3 - 1}{0{,}02} = 3{,}1216 \bullet C'$$

Así, la suma de ambos valores finales, que sabemos debe ser de 1.000.000 de euros, será:

$$(V_f)_{10} = (V_f)_{10}^1 + (V_f)_{10}^2$$

$$1.000.000 = 684.697{,}07 + 3.1216 \bullet C'$$

$$C' = \frac{1.000.000 - 684.697{,}07}{3{,}1216}$$

$$C' = 101.006{,}57$$

8.º Un particular quiere vender su casa, pero dada la complicada situación económica actual sabe que será difícil que al comprador le concedan hipoteca, por lo que acude a un asesor y le aconseja tres opciones diferentes para venderla:

***a*) Una señal de 15.000 euros en el momento de la firma de la compraventa y 250.000 con la entrega de las llaves;**

***b*) 15.000 euros con la firma del contrato, 20.000 con al entrega de las llaves y 25.000 euros anuales durante 10 años postpagables que se empiezan a pagar un año después a la entrega de las llaves.**

***c*) 15.000 euros con la firma del contrato, 40.000 con la entrega de las llaves y 1.000 euros mensuales postpagables durante 15 años, renta cuyo primer pago se realiza un año después de la entrega de las llaves.**

Sabiendo que el tipo de interés es del 5 % anual y que al entrega de las llaves es un año después de la firma del contrato, ¿qué alternativa debe escoger el vendedor?

Calculemos el valor actual de cada una de las operaciones.

$$a)\ (V_0)_a = 15.000 + \frac{250.000}{1+0{,}05} = 253.095{,}24\ euros$$

b) El valor de la renta de los 25.000 euros anuales será:

$$(V_1) = 25.000 \bullet \frac{1-(1+0{,}05)^{-10}}{0{,}05} = 193.043{,}37$$

Pero éste es el valor en el momento en que comienza el pago de la renta, que es un año después a la firma del contrato, por lo que habrá que actualizarlo:

$$(V_0) = \frac{193.043{,}37}{1+0{,}05} = 183.850{,}83$$

Ahora, el valor actual total de esta alternativa será:

$$(V_0)_b = 15.000 + \frac{40.000}{1+0{,}05} + 183.850{,}83 = 236.946{,}07$$

c) En este caso, al ser los pagos mensuales, en primer lugar debemos calcular el tipo de interés mensual:

$$\left(1+i_{12}\right)^{12}=1+0{,}05\Rightarrow i_{12}=0{,}004=0{,}4\,\%$$

Así, el valor de la renta en el momento de la entrega de las llaves será:

$$(V_1)=1.000\bullet\frac{1-\left(1+0{,}004\right)^{-180}}{0{,}004}=128.137{,}05$$

Que habrá que actualizar al momento de la firma del contrato:

$$(V_0)=\frac{128137{,}05}{1{,}05}=122.035{,}28$$

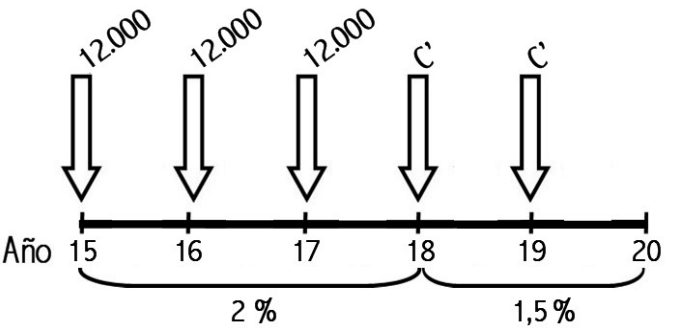
Así, el valor que obtendría actualizado con esta alternativa sería:

$$(V_0)_c=15.000+\frac{40.000}{1+0{,}05}+122.035{,}28=175.130{,}52\,euros$$

Por tanto, la mejor alternativa sería la *a*).

9.º Una comunidad de vecinos quiere realizar una serie de obras de rehabilitación de las zonas comunes y fachada. En el año 2015 se establecieron para ello unas derramas de 12.000 euros anuales remuneradas al 2 %. En el año 2018 ya se han efectuado tres de esas derramas (2015, 2016 y 2017). En la junta de propietarios se decidió realizar la rehabilitación en el año 2020, cuyo coste presupuestado es de 50.000 euros. Si las siguientes aportaciones se remuneran al 1,5 %, ¿cuál es el importe que debe aportar la comunidad de propietarios en las dos aportaciones pendientes de 2018 y 2019 para cubrir el gasto presupuestado?

La primera cuestión que debemos plantearnos es, ¿cuánto vale lo aportado hasta el 2017 incluido y cuál es su valor para el año 2020? El esquema de esta operación es:



Al tratarse de una renta anual postpagable, podemos calcular el valor de lo aportado en el año 2018:

$$(V_f)_{18}^{1} = 12.000 \bullet (1+0{,}02) \bullet \frac{(1+0{,}02)^3 - 1}{0{,}02} = 37.459{,}29$$

Capitalizado al año 2020:

$$(V_f)_{20}^{1} = 37.459{,}29 \bullet (1+0{,}02)^2 = 38.972{,}65$$

El valor de las dos aportaciones pendientes será:

$$(V_f)_{20}^{2} = C' \bullet (1+0{,}015) \bullet \frac{(1+0{,}015)^2 - 1}{0{,}015} = C' \bullet 2{,}0452$$

Así, el valor de la renta total es:

$$(V_f)_{20} = (V_f)_{20}^{1} + (V_f)_{20}^{1} \Rightarrow 50.000 = 38.972{,}65 + 2{,}0452 \bullet C'$$

$$C' = \frac{50.000 - 38.972{,}65}{2{,}0452} = 5.391{,}75\, euros$$

Existe otra forma para resolver esta cuestión sin utilizar las fórmulas de las rentas. ¿Sabrías cuál? Puedes compartirlo conmigo a través de la web facilitada al final de este libro.

10.º Quieres alquilar un piso y el propietario te ofrece las siguientes alternativas:

***a*) Un único pago de 49.000 euros al comienzo del contrato;**

***b*) Cinco pagos anuales de 10.000 euros al firmar el contrato;**

***c*) Veinte pagos trimestrales de 2.700 euros al firmar el contrato;**

***d)* Treinta pagos bimensuales de 1.800 euros al comienzo del contrato.**

Sabiendo que el tipo de interés a aplicar es del 1 %, ¿qué alternativa escogerías?

Calculemos el valor actual de cada una de las opciones:

a) No hace falta realizar ninguna operación, siendo el valor de 49.000 euros.

$$b)\ (V_0)_b = 10.000 \bullet (1+0{,}01) \bullet \frac{1-(1+0{,}01)^{-5}}{0{,}01} = 49.019{,}66$$

c) Calculemos primero el tipo de interés equivalente trimestral:

$$(1+i_4)^4 = 1+0{,}01 \Rightarrow i_4 = 0{,}00249 = 0{,}2491\%$$

$$(V_0)_c = 2.700 \bullet (1{,}00249) \bullet \frac{1-(1{,}00249)^{-20}}{0{,}00249} = 52.758{,}61$$

d) Nuevamente, primero calculamos el tipo de interés bimensual equivalente:

$$(1+i_6)^6 = 1+0{,}01 \Rightarrow i_6 = 0{,}001659 = 0{,}1659\,\%$$

$$(V_0)_d = 1.800 \bullet (1{,}001659) \bullet \frac{1-(1{,}001659)^{-30}}{0{,}001659} = 52.746{,}65$$

Así, de entre las tres opciones, como arrendatario, que es quien alquila el piso y debe pagar el alquiler, cogeremos aquella opción con la que menos haya que pagar, es decir, la primera opción, siempre que tuviéramos el suficiente dinero ahorrado.

III

PRÉSTAMOS

3.1. Cuadro de amortización

Se define como préstamo a toda operación financiera que consiste en una prestación, la dación de una cuantía determinada de dinero, y una contraprestación, la devolución de dicha cuantía con un tipo de interés concreto a aplicar en un periodo determinado de tiempo. Esta devolución puede ser realizada en un solo pago o en varios según el tipo de acuerdo, lo cuál definirá el tipo de préstamo.

En este capítulo se enseñará el origen de cada una de las fórmulas según el tipo de préstamo y tomando como estructura en el cuadro de amortización los distintos conceptos establecidos por definición, aunque cuenta con base lógica.

Todo cuadro de amortización contará con una primera columna que define el tiempo y que simbolizaremos como t_r. La r no es más que un símbolo genérico con el que se pretende englobar todos los periodos desde el primero hasta el último n, facilitando la generalización de las fórmulas que se vayan razonando.

La segunda columna se corresponderá con las cuotas que se pagarán en cada periodo como contraprestación del préstamo, también denominado como término amortizativo, y que se simboliza como a_r. Según el tipo de préstamo esta cuantía puede ser parte de intereses y parte de capital amortizado.

La tercera columna está destinada a la cuantía de intereses en términos absolutos que se pagan en cada periodo, quedando simbolizado como I_r y que también se conocerá como cuota de interés.

En una cuarta columna posicionaremos a Δ_r, que simboliza a la cuota del capital que es amortizado en el periodo en concreto. De esta forma, la suma de la cuota de interés I_r y de la cuota de amortización del capital Δ_r de la tercera y cuarta columnas será el término amortizativo a_r, cuantía total que se paga en el periodo, es decir, incluyendo capital amortizado e intereses.

En quinto lugar posicionaremos el capital pendiente de amortización, deuda pendiente o capital vivo y que simbolizaremos como C_r.

En la última columna se indicará el capital acumulado que ha sido amortizado en cada periodo y se simbolizará como M_r.

Con todo ello, el cuadro de amortización para un préstamo que se devuelve en un periodo de tiempo de n términos quedará:

t_r	a_r	I_r	Δ_r	C_r	M_r
0	-	-	-	C_0	-
1					
2					
3					
...					
r					
...					
n					

Las cuantías que completarán este cuadro quedará definido según la naturaleza del préstamo. No obstante, para que todos presenten una estructura similar se ha acordado que todos presenten estos datos, aunque el orden de las columnas puede varias según quién lo realice.

Dado que C_r representa el capital vivo en cada periodo y que estamos trabajando con préstamos, el importe que se percibe en el momento de la contratación del mismo será el de la cuantía del préstamo y que coincidirá con el momento $t=0$. Así, en t_0 el capital pendiente de amortización del préstamo será su cuantía y podemos definir como C_0.

Además, también es común a todo préstamo que en el momento de la contratación del mismo no se pague ninguna cuantía mientras no transcurra en primer periodo. De esta forma, a_r en t_0 será nulo, al igual que I_r (no se han podido generar intereses antes de que transcurra el primer periodo) y Δ_r (no tendría sentido que en el momento de recibir la cuantía del préstamo se pagara inmediatamente parte del mismo).

Todos estos conceptos son aplicables a todos los tipos de préstamos que se estudiarán a continuación razonando de forma lógica las fórmulas

que, desgraciadamente, muchos profesores hacen memorizar sin explicar su razonamiento.

Como se ha dicho anteriormente, el término amortizativo es la cuantía total que se paga en cada periodo, es decir, es la suma de la cuota de interés y de la cuota de amortización:

$$a_r = I_r + \Delta_r$$

Por su parte, los intereses generados será la cuantía determinada en función del tipo de interés aplicable *i* sobre el capital vivo hasta el periodo anterior:

$$I_r = iC_{r-1}$$

Otra característica de estos cuadros de amortización es que el capital vivo en el periodo presente será el resultado de restar al capital vivo en el periodo anterior la cuota amortizada en el periodo presente:

$$C_r = C_{r-1} - \Delta_r$$

Por último, la amortización acumulada del capital M_r será la suma de la amortización acumulada del periodo anterior más la cuota amortizada en el presente periodo:

$$M_r = M_{r-1} + \Delta_r$$

3.2. Préstamo simple

Este préstamo de un periodo determinado *n* es aquél en que no se realiza ningún pago de intereses ni de amortización de capital hasta el último periodo en el que se paga tanto capital como intereses habiendo, por tanto, un solo pago.

Este préstamo es muy característico pues es el único de los cuatro tipos que se verán en este manual que suponen un auténtico crecimiento de la deuda a lo largo del periodo.

Con todo ello, el planteamiento del préstamo será el que se muestra en la siguiente tabla:

t_r	a_r	I_r	Δ_r	C_r	M_r
0	-	-	-	C_0	-
1	0	0	0	C_0	0
2	0	0	0	C_0	0
3	0	0	0	C_0	0
...					
r	0	0	0	C_0	0
...					
n	a_n	I_n	Δ_n	0	M_n

Dado que no se realiza ningún pago en ninguno de los periodos salvo en el último, sabemos que:

$$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots a_r = 0$$

De tal forma que no se pagan ni intereses ni se amortiza el capital pendiente hasta el último periodo, por lo que:

$$I_1 = I_2 = I_3 = \ldots I_r = 0$$

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \ldots \Delta_r = 0$$

Dado que no se amortiza capital hasta el último periodo, el capital vivo se mantendrá hasta n en C_0:

$$C_1 = C_2 = C_3 = \ldots C_r = C_0$$

Por último, y por la misma razón que la anterior, el capital amortizado acumulado se mantendrá en 0 hasta el último periodo:

$$M_1 = M_2 = M_3 = \ldots M_r = 0$$

Así es como quedan justificados los datos reflejados en la tabla de amortización.

Respecto al último periodo, se sabe que los intereses se han generado sobre el capital pendiente de amortización, que es el mismo en todos los periodos, pero también los intereses generados en periodos anteriores han generado más intereses. De esta forma, y recordando el razonamiento

lógico planteado en el epígrafe 1.2.2. en función del cual:

$$C_n = C_0(1+i)^n$$

El valor obtenido de esta fórmula será el capital inicial por el que se constituyó el préstamo más los intereses generados en cada uno de los periodos. De esta forma, el valor obtenido será el término amortizativo:

$$a_n = C_n \rightarrow a_n = C_0(1+i)^n$$

Con todo ello, la cuota de intereses a pagar, se calculará:

$$I_n = C_n - C_0$$

O lo que es lo mismo:

$$I_n = a_n - \Delta_n$$

Dado que se sabe la cuota del capital que se amortiza, siendo completa:

$$\Delta_n = C_0$$

De esta forma:

$$I_n = C_0(1+i)^n - C_0 \rightarrow I_n = C_0\left[(1+i)^n - 1\right]$$

Por último, la amortización acumulada del capital en el último periodo será igual al capital que se adeudaba:

$$M_n = C_0$$

3.3. Préstamo americano

Este tipo de préstamo se caracteriza por que en cada periodo se pagan únicamente los intereses generados a lo largo del mismo, no amortizándose el capital hasta el último periodo en el que se amortizará íntegramente.

Dado que del capital no se amortiza ninguna cuantía salvo en el último periodo, en el que se amortiza en su totalidad, se sabe de la cuota del capital que es amortizado en todos los periodos será nulo, salvo en el último que será igual al capital que compone el préstamo:

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \ldots \Delta_r = \Delta_{n-1} = 0 \neq \Delta_n = C_0$$

De esta forma, el capital vivo existente en todos los periodos salvo en el último será el mismo que el inicial por el que se compuso el préstamo. En el último periodo, dado que se amortiza en su plenitud, el capital vivo pendiente de amortización será nulo:

$$C_1 = C_2 = C_3 = \ldots C_r = C_{n-1} = C_0 \neq C_n = 0$$

Dado que no se amortiza capital hasta el último periodo en el que se amortiza en su totalidad, el capital amortizado acumulado será siempre el mismo salvo en el último periodo:

$$M_1 = M_2 = M_3 = \ldots M_r = M_{n-1} = 0 \neq M_n = C_0$$

Respecto a los intereses generados en cada periodo, se sabe que el tipo impositivo es siempre sobre el capital vivo pendiente de amortización del periodo anterior. Así, dado que del capital inicial por el que se compone el préstamo no se amortiza nada hasta el último periodo y que sí se pagan todos los intereses generados, la cuota de interés será siempre la misma:

$$I_1 = I_2 = I_3 = \ldots I_r = I_n = C_0 i$$

Por último, del término amortizativo conocemos que es la suma de la cuota de interés y de la cuota de amortización del capital:

$$a_r = I_r + \Delta_r$$

De esta forma, sabiendo la naturaleza de este préstamo por el que sólo se pagan las cuotas de interés no amortizándose nada del capital hasta el último periodo en el que se amortiza íntegramente:

$$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots a_r = a_{n-1} = C_0 i$$

Y respecto del último periodo:

$$a_n = C_0 + C_0 i$$

Con todo lo dicho, el cuadro de amortización será como sigue:

t_r	a_r	I_r	Δ_r	C_r	M_r
0	-	-	-	C_0	-
1	$C_0 i$	$C_0 i$	0	C_0	C_0
2	$C_0 i$	$C_0 i$	0	C_0	C_0
3	$C_0 i$	$C_0 i$	0	C_0	C_0
...					
r	$C_0 i$	$C_0 i$	0	C_0	C_0
...					
n	$C_0+C_0 i$	$C_0 i$	C_0	0	0

3.4. Préstamo lineal

Este tipo de préstamo consiste en que el capital que compone el préstamo se amortizará en partes iguales entre todas las cuotas de amortización de capital.

De esta forma, cada una de las cuotas de amortización quedará determinado por el número de periodos *n* que componga el préstamo:

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \ldots \Delta_r = \Delta_n = \frac{C_0}{n}$$

De esta forma, el capital vivo en el primer periodo será:

$$C_1 = C_0 - \frac{C_0}{n}$$

En el segundo periodo:

$$C_2 = C_0 - \frac{C_0}{n} - \frac{C_0}{n} = C_0 - 2\frac{C_0}{n} = C_0\left(1 - \frac{2}{n}\right)$$

En el tercer periodo:

$$C_3 = C_0 - \frac{C_0}{n} - \frac{C_0}{n} - \frac{C_0}{n} = C_0\left(1 - \frac{3}{n}\right)$$

Para cualquier periodo:

$$C_r = C_0 - \frac{C_0}{n} - \frac{C_0}{n} - \frac{C_0}{n} \ldots "r" veces = C_0\left(1 - \frac{r}{n}\right)$$

Y, por último, en el último periodo, para el que debe quedar un capital pendiente igual a “0", en demostración de la fórmula general anteriormente deducida:

$$C_n = C_0 - \frac{C_0}{n} - \frac{C_0}{n} - \frac{C_0}{n} "n" veces = C_0\left(1 - \frac{n}{n}\right) = 0$$

Así, para poder calcular el capital vivo pendiente de amortización de cualquier periodo, la fórmula aplicable será:

$$C_r = C_0\left(1 - \frac{r}{n}\right)$$

La cuota de intereses sabiendo que se calculan aplicando el tipo de interés sobre el capital pendiente de amortización del periodo anterior, en el primer periodo será:

$$I_1 = C_0 i$$

En el segundo año:

$$I_2 = C_0\left(1 - \frac{1}{n}\right)i = C_0\left(1 - \frac{2-1}{n}\right)i$$

En el tercer año:

$$I_3 = C_0\left(1 - \frac{2}{n}\right)i = C_0\left(1 - \frac{3-1}{n}\right)i$$

Para cualquier periodo salvo el último, obtenemos la fórmula general:

$$I_r = C_0\left(1-\frac{r-1}{n}\right)i$$

La amortización acumulada del capital del primer periodo será:

$$M_1 = \frac{C_0}{n}$$

Y dado que todas las cuotas son de la misma cuantía, pues es la característica propia del préstamo lineal, en cada periodo se obtendrá:

$$M_2 = \frac{C_0}{n}2$$

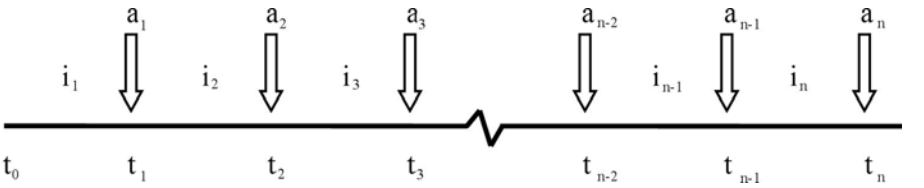
$$M_3 = \frac{C_0}{n}3$$

De lo que se deduce la fórmula final para el cálculo de la amortización acumulada del capital en cualquier periodo:

$$M_r = \frac{C_0}{n}r$$

3.5. Préstamo francés

El préstamo francés consiste en que todos los términos amortizativos a_r serán iguales. Así el esquema que se puede presentar de este préstamo es igual al de una renta postpagable constante:



En esta misma, los valores de cada uno de los pagos serán los mismos:

$$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots a_{n-2} = a_{n-1} = a_n$$

Con todo ello, según la demostración del epígrafe 2.2.2. en consecución con los anteriores, se sabe que el valor actual de una renta no unitaria, constante, postpagable, con un tipo de interés constante es:

$$a_{n/i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \rightarrow (V_a)_{n/i} = aa_{n/i}$$

El valor actual del préstamo francés será la cuantía por la que se constituye el mismo y que, hasta ahora, se ha denominado como C_0. Por tanto, para conocer el término amortizativo de cada uno de los periodos simplemente habrá que conocer el valor del mismo según la fórmula anterior:

$$(V_a)_{n/i} = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Sabiendo que:

$$(V_a)_{n/i} = C_0$$

Obtendremos la siguiente operación de la que únicamente se desconocerá el término amortizativo a que será el mismo para los n periodos:

$$C_0 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Obteniéndose la fórmula general que suele copiarse en la pizarra sin ningún tipo de razonamiento:

$$a = C_0\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

Dado que esta cuota está compuesta por una parte de intereses y otra de amortización de capital (recuérdese que $a_r = I_r + \Delta_r$), que los intereses

generados son siempre sobre el capital pendiente de amortización (recuérdese también que $I_r=i\cdot C_{r-1}$), y que este préstamo se caracteriza por que primero se pagan los intereses devengados en cada periodo y posteriormente se devolverá una parte del capital pendiente de amortización hasta igualar al término de amortización, tendrá como consecuencia que la cuota de intereses vaya decreciendo a lo largo de los periodos y la cuota de amortización del capital crezca paulatinamente.

Con todo ello, el planteamiento del cuadro de amortización será el siguiente:

t_r	a_r	I_r	Δ_r	C_r	M_r
0	-	-	-	C_0	-
1	a	$C_0 i$	Δ_1	C_1	C_0
2	a	$C_1 i$	Δ_2	C_2	C_0
3	a	$C_2 i$	Δ_3	C_3	C_0
...					
r	a	$C_{r-1} i$	Δ_r	C_r	C_0
...					
n	a	$C_{n-1}\cdot i$	Δ_n	0	0

Con todo ello, se conoce cuál será la cuota de interés, pues:

$$I_1 = C_0 i$$

Y también se conoce que los intereses generados en ese periodo se pagarán íntegramente y el resto del término amortizativo se destinará a la amortización del capital pendiente, siendo así que:

$$a = I_1 + \Delta_1$$

Por lo que:

$$\Delta_1 = a - I_1 \rightarrow \Delta_1 = a - C_0 i$$

Así, aunque no se concluya nada al respecto, según los razonamientos lógicos de los pasos posteriores:

$$\Delta_1 = \left(a - C_0 i\right)\left(1+i\right)^{1-1}$$

Este planteamiento se considera necesario para concluir la fórmula final, según las conclusiones de los apartados posteriores respecto a la cuota de amortización del capital.

Por último, en este primer periodo únicamente queda por conocer el valor del capital pendiente de amortización C_1:

$$C_1 = C_0 - \Delta_1$$

Conociendo el valor de la cuota de amortización del capital pendiente:

$$C_1 = C_0 - \left(a - C_0 i\right)\left(1+i\right)^{1-1}$$

Tras cuya resolución se obtiene:

$$C_1 = C_0 + C_0 i - a$$

$$C_1 = C_0 + C_0 i - C_0 \frac{i}{1-\left(1+i\right)^{-n}}$$

De lo que se obtiene:

$$C_1 = C_0 \left(1 + i - \frac{i}{1-\left(1+i\right)^{-n}} \right)$$

De esta operación y con objeto de que sea reconocible su planteamiento con el resto del razonamiento lógico para obtener la fórmula final, es lo mismo que:

$$C_1 = C_0 \left[\left(1+i\right)^{1} + \frac{1-\left(1+i\right)^{1}}{1-\left(1+i\right)^{-n}} \right]$$

Continuemos con el razonamiento lógico para el segundo periodo. Recuérdese que el término amortizativo a_2 es el mismo para todos, a. Así, la cuota del capital que será amortizado en el segundo periodo será:

$$\Delta_2 = a - I_2 = a - C_1 i$$

Conociendo los valores de cada elemento:

$$\Delta_2 = a - C_0\left[\left(1+i\right)+\frac{1-\left(1+i\right)}{1-\left(1+i\right)^{-n}}\right]i$$

Aplicando la propiedad distributiva del tipo de interés *i* y el capital inicial del préstamo:

$$\Delta_2 = a - C_0\left(1+i\right)i - C_0 i\,\frac{1-\left(1+i\right)}{1-\left(1+i\right)^{-n}}$$

Recuérdese que el valor de *a* es:

$$a = C_0\,\frac{i}{1-\left(1+i\right)^{-n}}$$

Por lo que, sustituyendo en el tercer miembro de la resta:

$$\Delta_2 = a - C_0\left(1+i\right)i - a\left[1-\left(1+i\right)\right] = a - C_0\left(1+i\right)i - a + a\left(1+i\right)$$

Dado que tenemos un valor *a* que suma y otro que resta:

$$\Delta_2 = a\left(1+i\right) - C_0 i\left(1+i\right)$$

Sacando factor común, se obtiene la fórmula final:

$$\Delta_2 = \left(a - C_0 i\right)\left(1+i\right)^{2-1}$$

El siguiente dato a calcular en el segundo periodo es el capital pendiente de amortización. Así, sabemos al igual que en el caso anterior:

$$C_2 = C_1 - \Delta_2$$

Puesto que conocemos los valores del capital pendiente de amortización del periodo anterior y la cuota de amortización del capital del segundo periodo, ambos razonados anteriormente, se sustituyen ambos valores:

$$C_2 = C_0\left[\left(1+i\right)+\frac{1-\left(1+i\right)}{1-\left(1+i\right)^{-n}}\right]-\left(a-C_0 i\right)\left(1+i\right)$$

Aplicando la propiedad distributiva de ambos sumandos:

$$C_2 = C_0\left(1+i\right)+C_0\frac{1-\left(1+i\right)}{1-\left(1+i\right)^{-n}}-C_0\frac{i}{1-\left(1+i\right)^{-n}}\left(1+i\right)+C_0 i\left(1+i\right)$$

De lo cual, sacando factor común de C_0:

$$C_2 = C_0\left[\left(1+i\right)+i\left(1+i\right)+\frac{1-\left(1+i\right)-i\left(1+i\right)}{1-\left(1+i\right)^{-n}}\right]$$

Es fácil conocer el valor de la operación siguiente:

$$\left(1+i\right)+i\left(1+i\right)=\left(1+i\right)^2$$

Así, tras realizar esa doble operación que se encuentra entre los corchetes, una siendo el primer sumando y la otra encontrándose con signo negativo en el numerador de la fracción dejando solo el *1*, quedará:

$$C_2 = C_0\left[\left(1+i\right)^2+\frac{1-\left(1+i\right)^2}{1-\left(1+i\right)^{-n}}\right]$$

En el tercer periodo el procedimiento es el mismo. El término amortizativo es exactamente el mismo que en los periodos anteriores, pues es lo que caracteriza a este préstamo. La cuota de interés del periodo será:

$$I_3 = C_2 i$$

Por lo que la cuota de amortización del capital será:

$$\Delta_3 = a - I_3 = a - C_2 i$$

Dado que conocemos todos los valores, pues se han calculado anteriormente, se tiene:

$$\Delta_3 = a - C_0\left[\left(1+i\right)^2 + \frac{1-\left(1+i\right)^2}{1-\left(1+i\right)^{-n}}\right]i$$

Desarrollando la operación:

$$\Delta_3 = a - C_0 i\left(1+i\right)^2 - C_0 i\,\frac{1-\left(1+i\right)^2}{1-\left(1+i\right)^{-n}}$$

Recuérdese el valor del término amortizativo *a*, el cual se sustituye en el tercer sumando:

$$\Delta_3 = a - C_0 i\left(1+i\right)^2 - a\left[1-\left(1+i^2\right)\right]$$

De lo cual se realiza la siguiente resolución:

$$\Delta_3 = a - C_0 i\left(1+i\right)^2 - a + a\left(1+i\right)^2$$

$$\Delta_3 = a\left(1+i\right)^2 - C_0 i\left(1+i\right)^2$$

De lo que, sacando factor común, se obtiene la fórmula final:

$$\Delta_3 = \left(a - C_0 i\right)\left(1+i\right)^2$$

Para calcular el capital pendiente de amortización en este tercer periodo, se sabe:

$$C_3 = C_2 - \Delta_3$$

Conociendo ambos valores, se tiene:

$$C_3 = C_0\left[\left(1+i\right)^2 + \frac{1-\left(1+i\right)^2}{1-\left(1+i\right)^{-n}}\right] - \left(a - C_0 i\right)\left(1+i\right)^2$$

Aplicando la propiedad distributiva en ambos sumandos:

$$C_3 = C_0(1+i)^2 + C_0\frac{1-(1+i)^2}{1-(1+i)^{-n}} - C_0\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}(1+i)^2 + C_0 i(1+i)^2$$

Sacando factor común del capital inicial:

$$C_3 = C_0\left[(1+i)^2 + \frac{1-(1+i)^2}{1-(1+i)^{-n}} - \frac{i(1+i)^2}{1-(1+i)^{-n}} + i(1+i)^2\right]$$

Reordenando los sumandos del corchete, se tiene:

$$C_3 = C_0\left[(1+i)^2 + i(1+i)^2 + \frac{1-(1+i)^2 - i(1+i)^2}{1-(1+i)^{-n}}\right]$$

Se sabe el resultado de la siguiente operación:

$$(1+i)^2 + i(1+i)^2 = (1+i)^3$$

Por lo que se resuelven las operaciones tanto de la suma como de la resta que se encuentra en el numerador de la fracción, quedando la fórmula final:

$$C_3 = C_0\left[(1+i)^3 + \frac{1-(1+i)^3}{1-(1+i)^{-n}}\right]$$

Con todo ello, se observa una constante en los resultados finales, tanto de la cuota de amortización del capital como del capital vivo en cada uno de los periodos, pudiendo identificarse una multiplicación en el que uno de los productos está elevado al número del periodo menos la unidad, tal y como se observa en la siguiente agrupación de los diferentes resultados obtenidos:

$$\Delta_1 = \left(a - C_0 i\right)\left(1+i\right)^{1-1}$$

$$\Delta_2 = \left(a - C_0 i\right)\left(1+i\right)^{2-1}$$

$$\Delta_3 = \left(a - C_0 i\right)\left(1+i\right)^{3-1}$$

$$C_1 = C_0\left[\left(1+i\right)^{1-1}\frac{1-\left(1+i\right)^{1-1}}{1-\left(1+i\right)^{-n}}\right]$$

$$C_2 = C_0\left[\left(1+i\right)^{2-1}\frac{1-\left(1+i\right)^{2-1}}{1-\left(1+i\right)^{-n}}\right]$$

$$C_3 = C_0\left[\left(1+i\right)^{3-1}\frac{1-\left(1+i\right)^{3-1}}{1-\left(1+i\right)^{-n}}\right]$$

En este caso puede concluirse una fórmula general aplicable para cualquier periodo en cada uno de los casos:

$$\Delta_r = \left(a - C_0 i\right)\left(1+i\right)^{r-1}$$

$$C_r = C_0\left[\left(1+i\right)^{r-1}\frac{1-\left(1+i\right)^{r-1}}{1-\left(1+i\right)^{-n}}\right]$$

Sin embargo, debe demostrarse que tales fórmulas son válidas para toda la vida del préstamo en cualquier periodo *r*. Así, para el cálculo de la cuota de amortización del capital en cualquier periodo, tendremos:

$$\Delta_r = a - C_{r-1} i$$

En este punto debe plantearse el valor de C_{r-1}:

$$C_{r-1} = C_0\left[\left(1+i\right)^{r-2} + \frac{1-\left(1+i\right)^{r-2}}{1-\left(1+i\right)^{-n}}\right] - \left(a - C_0 i\right)\left(1+i\right)^{r-2}$$

De esta operación se obtiene aplicando la propiedad distributiva:

$$C_{r-1} = C_0\left(1+i\right)^{r-2} + C_0\,\frac{1-\left(1+i\right)^{r-2}}{1-\left(1+i\right)^{-n}} - a\left(1+i\right)^{r-2} + C_0 i\left(1+i\right)^{r-2}$$

Conociendo el valor del término de amortización y sacando factor común de C_0:

$$C_{r-1} = C_0\left(1+i\right)^{r-2} + C_0\,\frac{1-\left(1+i\right)^{r-2}}{1-\left(1+i\right)^{-n}} - C_0\,\frac{i\left(1+i\right)^{r-2}}{\left(1+i\right)^{-n}} + C_0 i\left(1+i\right)^{r-2}$$

$$C_{r-1} = C_0\left[\left(1+i\right)^{r-2} + \frac{1-\left(1+i\right)^{r-2} - i\left(1+i\right)^{r-2}}{1-\left(1+i\right)^{-n}} + i\left(1+i\right)^{r-2}\right]$$

En este punto debe saberse la existencia de la siguiente igualdad:

$$\left(1+i\right)^{r-1} + i\left(1+i\right)^{r-1} = \left(1+i\right)^{r}$$

Sin embargo, ésta debe demostrarse. Así, restemos ambos miembros de la igualdad por $(1+i)^r$, quedando:

$$\left(1+i\right)^{r-1} + i\left(1+i\right)^{r-1} - \left(1+i\right)^{r} = 0$$

Lo cual, es lo mismo que decir:

$$\left(1+i\right)^{r-1} + i\left(1+i\right)^{r-1+0} - \left(1+i\right)^{r-1+1} = 0$$

Es decir:

$$\left(1+i\right)^{r-1} + i\left(1+i\right)^{0}\left(1+i\right)^{r-1} - \left(1+i\right)^{1}\left(1+i\right)^{r-1} = 0$$

De lo que se puede sacar factor común:

$$\left(1+i\right)^{r-1}\left[1 + i\left(1+i\right)^{0} - \left(1+i\right)^{1}\right] = 0$$

Lo cual, al resolverse se obtiene:

$$(1+i)^{r-1}(1+i-1-i)=(1+i)^{r-1}0=0$$

Habiendo quedado demostrada la operación. Así, volviendo con el razonamiento de C_{r-1} y sustituyendo por el valor demostrado:

$$C_{r-1}=C_0\left[(1+i)^{r-1}+\frac{1-(1+i)^{r-1}}{1-(1+i)^{-n}}\right]$$

Por tanto, puede continuarse calculando el valor de Δ_r, quedando lo siguiente:

$$\Delta_r=a-C_0\left[(1+i)^{r-1}+\frac{1-(1+i)^{r-1}}{1-(1+i)^{-n}}\right]i$$

Aplicando la propiedad distributiva:

$$\Delta_r=a-C_0i(1+i)^{r-1}-C_0i\frac{1-(1+i)^{r-1}}{1-(1+i)^{-n}}$$

Recordando el valor del término de amortización a:

$$\Delta_r=a-C_0i(1+i)^{r-1}-a\left[1-(1+i)^{r-1}\right]$$

Es decir, aplicando la propiedad distributiva en el tercer sumando:

$$\Delta_r=a-C_0i(1+i)^{r-1}-a+a(1+i)^{r-1}$$

Queda, finalmente, la fórmula general demostrada:

$$\Delta_r=(a-C_0i)(1+i)^{r-1}$$

Ahora se puede continuar con la demostración de la fórmula del capital

vivo pendiente de amortización en cualquier periodo C_r, para lo que se sabe que:

$$C_r = C_{r-1} - \Delta_r$$

Conociendo ambos valores:

$$C_r = C_0\left[\left(1+i\right)^{r-1} + \frac{1-\left(1+i\right)^{r-1}}{\left(1+i\right)^{-n}}\right] - \left(a - C_0 i\right)\left(1+i\right)^{r-1}$$

Aplicando la propiedad distributiva:

$$C_r = C_0\left(1+i\right)^{r-1} + C_0\frac{1-\left(1+i\right)^{r-1}}{1-\left(1+i\right)^{-n}} - C_0 i\frac{\left(1+i\right)^{r-1}}{1-\left(1+i\right)^{-n}} - C_0 i\left(1+i\right)^{r-1}$$

Factorizando:

$$C_r = C_0\left[\left(1+i\right)^{r-1} + i\left(1+i\right)^{r-1} + \frac{1-\left(1+i\right)^{r-1} - i\left(1+i\right)^{r-1}}{1-\left(1+i\right)^{-n}}\right]$$

Recordando que, como se ha demostrado anteriormente:

$$\left(1+i\right)^{r-1} + i\left(1+i\right)^{r-1} = \left(1+i\right)^{r}$$

Se obtiene la fórmula final, quedando demostrado que es válida para calcular el capital vivo pendiente de amortización en cualquier periodo:

$$C_r = C_0\left[\left(1+i\right)^{r} + \frac{1-\left(1+i\right)^{r}}{1-\left(1+i\right)^{-n}}\right]$$

Y así es como deberían enseñarse las fórmulas de cada uno de los préstamos, no escribiéndose éstas en la pizarra para que el alumno las memorice sin ningún tipo de razonamiento lógico o facilitándolas en el examen para que el estudiante, simplemente, sustituya los valores.

3.6. Ejercicios resueltos

Como en cada tema con esta segunda edición del libro, procedamos a poner en práctica nuestros conocimientos adquiridos con distintos ejercicios que os propongo y resuelvo.

1.º Elabora el cuadro de amortización de un préstamo de 100.000 euros a tres años al 2 % anual con cuotas anuales iguales.

Dado que nos dan 100.000 euros en el momento actual y se devolverán en tres cuotas anuales iguales, sabemos que:

$$100.000 = \frac{a}{1+0{,}02} + \frac{a}{(1+0{,}02)^2} + \frac{a}{(1+0{,}02)^3}$$

Despejando *a*:

$$100.000 = a \bullet \left(\frac{1}{1{,}02} + \frac{1}{1{,}02^2} + \frac{1}{1{,}02^3} \right)$$

$$a = \frac{100.000}{2{,}8839} = 34.675{,}47\, euros$$

Ya podemos completar el cuadro de amortización paso a paso. En primer lugar el interés devengado en el primer año será:

$$I_1 = C_0 i = 100.000 \bullet 0{,}02 = 2.000$$

Por lo que el capital amortizado será:

$\Delta_1 = a_1 - I_1 = 34.675{,}47 - 2.000 = 32.675{,}47$

Así, el capital pendiente de amortización en el primer año es:

$C_1 = C_0 - \Delta_1 = 100.000 - 32.675{,}47 = 67.324{,}53$

Los intereses del segundo año son:

$$I_2 = C_1 i = 67.324{,}53 \bullet 0{,}02 = 1.346{,}49$$

El capital amortizado del segundo año:

$\Delta_2 = a_2 - I_2 = 34.675{,}47 - 1.346{,}49 = 33.328{,}98$

Por lo que el capital pendiente de amortización en el segundo año es:

$C_2=C_1-\Delta_2$=67.324,53-33328,98=33.995,55

Por último, los intereses del tercer año son:

$$I_3 = C_2 i = 33.995{,}55 \bullet 0{,}02 = 679{,}91$$

El capital amortizado del tercer año:

$\Delta_3=a_3-I_3$=34.675,47-679,91=33.995,55

Por lo que el capital pendiente de amortización en el tercer año es:

$C_3=C_2-\Delta_3$=33.995,55-33.995,55=0

Las amortizaciones acumuladas de cada año son:

$M_1=\Delta_1$=32.675,47

$M_2=M_1+\Delta_2$=32.675,47+33.328,98=66.004,45

$M_3=M_2+\Delta_3$=66.004,45+33.995,55=100.000

Con todo ello, el cuadro de amortización queda como sigue:

t_r	a_r	I_r	Δ_r	C_r	M_r
0	-	-	-	100.000	-
1	34.675,47	2.000	32.675,47	67.324,53	32.675,47
2	34.675,47	1.346,49	33.328,98	33.995,55	66.004,45
3	34.675,47	679,91	33.995,55	0	100.000

2.º Elaborar el cuadro de amortización del mismo préstamo anterior de 100.000 euros se concede a cuatro años, y las cuotas anuales a devolver son, la segunda el doble que la primera, la tercera el triple que la primera y la cuarta el cuádruple que la primera. Los tipos de interés de cada periodo son: i_1=5 %, i_2= 4 %, i_3 =3 % e i_4=2%.

En primer lugar debemos calcular las cuotas de cada año:

$$100.000 = \frac{a}{1{,}05} + \frac{2a}{1{,}05 \bullet 1{,}04} + \frac{3a}{1{,}05 \bullet 1{,}04 \bullet 1{,}03} + \frac{4a}{1{,}05 \bullet 1{,}04 \bullet 1{,}03 \bullet 1{,}02}$$

$$100.000 = a \bullet 8{,}9377$$

$$a = 11.188{,}56$$

Así, las cuotas de cada año son:

$$a_1 = a = 11.188{,}56$$
$$a_2 = 2a = 22.377{,}12$$
$$a_3 = 3a = 33.565{,}68$$
$$a_4 = 4a = 44.754{,}24$$

Ya podemos completar la primera columna con dichas cuantías.

Los intereses del primer año son:

$$I_1 = C_0 i = 100.000 \bullet 0{,}05 = 5.000$$

Así, el capital amortizado en el primer año es:

$\Delta_1 = a_1 - I_1 = 11.188{,}56 - 5.000 = 6.188{,}56$

Quedando pendiente de amortizar:

$C_1 = C_0 - \Delta_1 = 100.000 - 6.188{,}56 = 93.811{,}44$

Los intereses del segundo año son:

$$I_2 = C_1 i = 93.811{,}44 \bullet 0{,}04 = 3.752{,}46$$

Así, el capital amortizado en el segundo año es:

$\Delta_2 = a_2 - I_2 = 22.377{,}12 - 3752{,}46 = 18.624{,}66$

Quedando pendiente de amortizar:

$C_2 = C_1 - \Delta_2 = 93.811{,}44 - 18.624{,}66 = 75.186{,}78$

Los intereses del tercer año son:

$$I_3 = C_2 i = 75.186{,}78 \bullet 0{,}03 = 2.255{,}60$$

Así, el capital amortizado en el tercer año es:

$\Delta_3 = a_3 - I_3 = 33.565{,}68 - 2.255{,}60 = 31.310{,}08$

Quedando pendiente de amortizar:

$C_3 = C_2 - \Delta_3 = 75.186{,}78 - 31.310{,}08 = 43.876{,}70$

Por último, los intereses del cuarto año son:

$$I_4 = C_3 i = 43.876{,}70 \bullet 0{,}02 = 877{,}53$$

Así, el capital amortizado en el cuarto año es:

$\Delta_4 = a_4 - I_4 = 44.754{,}24 - 877{,}53 = 43.876{,}71$

Habiendo amortizado la totalidad del capital pendiente:

$C_4 = C_3 - \Delta_4 = 43.876{,}70 - 43.876{,}71 \approx 0$

Ya sólo queda pendiente calcular los sumatorios del capital amortizado, quedando el cuadro de amortización como sigue:

t_r	a_r	I_r	Δ_r	C_r	M_r
0	-	-	-	100.000	-
1	11.188,56	5.000	6.188,56	93.811,44	6.188,56
2	22.377,12	3.752,46	18.624,66	75.186,78	24.813,22
3	33.565,68	2.255,60	31.310,08	43.876,70	56.123,30
4	44.754,24	877,53	43.876,71	0	100.000

3.º Calcular las cuotas de un préstamo americano de 50.000 euros a 5 años al 2 % nominal anual con cuotas mensuales.

Calculemos en primer lugar el tipo de interés mensual:

$$\left(1 + i_{12}\right)^{12} = 1 + 0{,}02 \Rightarrow i_{12} = \sqrt[12]{1{,}02} - 1 = 0{,}00165 = 0{,}165\%$$

Conforme al concepto de préstamo americano:

$$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_{59} = C_0 \bullet i = 50.000 \bullet 0{,}00165 = 82{,}58$$

Pero la última cuota será:

$$a_{60} = C_0 + C_0 \bullet i = 50.000 \bullet 1{,}00165 = 50.082{,}58$$

4.º Un préstamo concedido de 100.000 euros se amortiza mensualmente por el sistema francés al tipo anual nominal del 5 % en 10 años. Calcular las cuotas mensuales. Calcular la cuota mensual del mes 30.º, así como los intereses y parte del capital pagado, así como el capital amortizado acumulado y el capital vivo.

$$\left(1 + i_{12}\right)^{12} = 1 + 0{,}05 \Rightarrow i_{12} = \sqrt[12]{1{,}05} - 1 = 0{,}00407 = 0{,}407\%$$

Son 10 años y los pagos satisfechos son mensuales, por lo que hay 120 periodos.

$$a = C_0 \frac{i_{12}}{1-\left(1+i_{12}\right)^{-n}} = 100.000 \bullet \frac{0{,}00407}{1-\left(1+0{,}00407\right)^{-120}} = 1.054{,}17$$

Para el 30.º mes, el capital pendiente de amortización será:

$$C_{30} = 100.000 \bullet \left[\left(1+0{,}00407\right)^{30} + \frac{1-\left(1+0{,}00407\right)^{30}}{1-\left(1+0{,}00407\right)^{-120}} \right] = 79.368{,}13$$

El capital amortizado es de:

$$M_{30} = C_0 - C_{30} = 100.000 - 79.368{,}13 = 20.631{,}87$$

La parte del capital amortizado en el 30.º mes es de:

$$\Delta_{30} = \left(a - C_0 i_{12}\right)\left(1+i_{12}\right)^{30-1}$$

$$\left(1.054{,}17 - 100.000 \bullet 0{,}00407\right) \bullet \left(1+0{,}00407\right)^{29} = 728{,}07$$

Por último, los intereses satisfechos en dicha mensualidad son de:

$$I_{30} = a - \Delta_{30} = 1.054{,}17 - 728{,}07 = 326{,}10$$

5.º Se concedió un préstamo para la compra de una vivienda de 150.000 euros a 15 años, con cuotas mensuales contantes y a un tipo de interés nominal anual del 3 % y con una comisión por cancelación anticipada del 2 %. En el cuarto año otra entidad ofrece préstamos al 2,4 % con una comisión de apertura del 1 % requiriéndose una nueva tasación del inmueble de 250 €. Además, los gastos de notaría y registro ascienden a 2.500 €. ¿Interesaría cambiar de entidad bancaria?

El tipo de interés mensual es de:

$$i_{12} = \frac{i}{12} = \frac{0{,}03}{12} = 0{,}0025$$

El número de periodos del préstamo es de 12 meses en 15 años, siendo

un total de 180 meses.

La mensualidad del primer préstamo será de:

$$a = 150.000 \bullet \frac{0{,}0025}{1-(1+0{,}0025)^{-180}} = 1.035{,}87$$

Puesto que se produce en el cuarto año la posibilidad del cambio, supondremos que es al comienzo del mismo, habiendo transcurrido tres años, encontrándonos por tanto en el 36.º mes. La deuda pendiente de pago en este mes es de:

$$C_{36} = 150.000 \bullet \left[(1+0{,}0025)^{36} + \frac{1-(1+0{,}0025)^{36}}{1-(1+0{,}0025)^{-180}} \right] = 125.137{,}61$$

El cambio de entidad debe suponer un préstamo resultante suficiente para saldar la deuda con la anterior más los gastos ocasionados. El plazo no debe variar, pero la cuota mensual es lo que se mantiene como incógnita, debiéndose calcular una nueva. Así, los gastos que conlleva el cambio son:

a) La comisión por la cancelación de la deuda pendiente del 2 %:

$$C_c = C_{36} \bullet 0{,}02 = 125.137{,}61 \bullet 0{,}02 = 2.502{,}75$$

b) Comisión de apertura de la nueva hipoteca del 1 % sobre el principal del nuevo préstamo, principal que desconocemos:

$$C_a = C'_0 \bullet 0{,}01$$

c) Gastos de la nueva tasación e la vivienda por valor de 250 €.

d) Gastos de notaría y registro por valor de 2.500 €.

En suma, la cuantía del nuevo préstamo debe ser de:

$$C'_0 = 125.137{,}61 + 2.502{,}75 + C'_0 \bullet 0{,}01 + 250 + 2.500$$

$$C'_0 = 131.707{,}44$$

Así, sabiendo que el nuevo tipo de interés mensual es de:

$$i_{12} = \frac{i}{12} = \frac{0{,}024}{12} = 0{,}002$$

La nueva cuota mensual sería:

$$a' = 131.707{,}44 \bullet \frac{0{,}002}{1-\left(1+0{,}002\right)^{-144}} = 1.053{,}56\, euros$$

Es decir, que la cuota mensual con el primer préstamo sería más baja que frente a si se cambiara de entidad, no compensando dicha subrogación, lo que se debe a que el tipo de interés no es lo suficientemente bajo frente a los gastos y comisiones, compensando más quedarse con la hipoteca contratada desde el principio.

6.º Una empresa durante el proceso de constitución solicitó un préstamo hipotecario de 1.000.000 de euros para comenzar con su actividad comercial, a devolver en 30 años a un tipo del 7,5 % anual nominal con cuotas mensuales según el sistema francés. De eso hace ya 10 años y siete meses, pero dada la situación económico-financiera del país, la demanda de los clientes ha caído y no puede hacer frente al pago de las cuotas. Para evitar la ejecución hipotecaria se ha pactado un periodo de carencia de tres años y la nueva hipoteca será al 7,8 % incluyendo el periodo de carencia. La comisión de la operación es del 1 % del nuevo importe y unos gastos de 2.000 euros. ¿Cuál es la cuota mensual durante el periodo de carencia y tras el mismo?

Son un total de 12 meses en 30 años, es decir, 360 periodos. Al ser el tipo de interés anual nominal, el mensual será:

$$i_{12} = \frac{i}{12} = \frac{0{,}075}{12} = 0{,}00625$$

La cuota mensual antes del periodo de carencia era de:

$$a = 1.000.000 \bullet \frac{0{,}00625}{1-\left(1+0{,}00625\right)^{-360}} = 6.992{,}15$$

La empresa tiene problemas en el año 10, séptimo mes, lo que supone ser

el periodo n.º 127 (12x10+7). En este periodo, el captial pendiente de pago es de:

$$C_{127} = 1.000.000 \bullet \left[\left(1 + 0{,}00625\right)^{127} + \frac{1 - \left(1 + 0{,}00625\right)^{127}}{1 - \left(1 + 0{,}00625\right)^{-360}} \right] = 856.769{,}77$$

Así, el importe del nuevo préstamo será el capital pendiente anterior más la comisión y los gastos fijos:

$$C'_0 = 856.769{,}77 + 0{,}01 \bullet C'_0 + 2.000$$

$$C'_0 = \frac{856.769{,}77 + 2.000}{0{,}99} = 867.444{,}22$$

El nuevo tipo de interés mensual será de:

$$i_{12} = \frac{0{,}078}{12} = 0{,}0065$$

Así, la cuota durante el periodo de carencia se corresponderán con los intereses devengados únicamente, ya que la carencia consiste en la no amortización del capital pendiente:

$$a' = C'_0 \, i'_{12} = 867.444{,}22 \bullet 0{,}0065 = 5.638{,}39$$

Y tras el periodo de carencia, que nos encontraremos en el periodo 163 (127+12x3), quedando así 197 meses (360-163), siendo la nueva cuota mensual de:

$$a'' = 867.444{,}22 \bullet \frac{0{,}0065}{1 - \left(1 + 0{,}0065\right)^{-197}} = 7.820{,}80$$

7.º Se acuerda un préstamo amortizado por el sistema francés por un importe de 125.000 euros a 15 años con cuotas mensuales. El tipo de interés del primer año será del 3 %. A partir del segundo año será el Euribor más un 1,75 % nominal anual.

***a*) Calcular la cuota mensual del primer año.**

$$i_{12} = \frac{0{,}03}{12} = 0{,}0025$$

Son un total de 180 meses (15x12), por lo que la cuota en el primer año será de:

$$a = 125.000 \bullet \frac{0{,}0025}{1-\left(1+0{,}0025\right)^{-180}} = 863{,}23$$

***b*) En el segundo año el Euribor se encuentra en el 0,25 %. Calcular la nueva cuota mensual.**

El tipo de interés anual es del 2 % (Euribor más un 1,75 %), siendo el tipo de interés mensual de:

$$i_{12} = \frac{0{,}02}{12} = 0{,}0017$$

El capital pendiente de amortización al comienzo del segundo año es de:

$$C_{12} = 125.000 \bullet \left[\left(1+0{,}0017\right)^{12} + \frac{1-\left(1+0{,}0017\right)^{12}}{1-\left(1+0{,}0017\right)^{-180}} \right] = 117.635{,}71$$

Así, la cuota mensual durante el segundo año será de:

$$a' = 117.635{,}71 \bullet \frac{0{,}0017}{1-\left(1+0{,}0017\right)^{-168}} = 805{,}55$$

***c*) En el tercer año el Euribor baja al 0,2 %. Calcular la nueva cuota mensual.**

El tipo de interés anual es del 1,95 % (Euribor más un 1,75 %), siendo el tipo de interés mensual de:

$$i_{12} = \frac{0{,}0195}{12} = 0{,}001625$$

El capital pendiente de amortización al comienzo del tercer año es de:

$$C_{12} = 117.635,71 \bullet \left[\left(1 + 0,001625\right)^{12} + \frac{1 - \left(1 + 0,001625\right)^{12}}{1 - \left(1 + 0,001625\right)^{-168}} \right] = 110.255,47$$

Así, la cuota mensual durante el tercer año será de:

$$a'' = 110.255,47 \bullet \frac{0,001625}{1 - \left(1 + 0,001625\right)^{-156}} = 800,70$$

8.º Un préstamo de 90.000 euros a tres años con cuota mensual constante se devuelve a un tipo de interés del Euribor más un 1,5 % revisable cada año.

***a*) En el momento de la concesión del préstamo el Euribor se encuentra en el 1,5 % y se mantiene contante durante los tres años, elaborar el cuadro de amortización.**

La anualidad es de:

$$a = 90.000 \bullet \frac{0,03}{1 - \left(1 + 0,03\right)^{-3}} = 31.817,73$$

El resto de datos son:

$$I_1 = 90.000 \bullet 0,03 = 2.700$$

$$\Delta_1 = a - I_1 = 31.817,73 - 2.700 = 29.117,73$$

$$C_1 = C_0 - \Delta_1 = 90.000 - 29.117,73 = 60.882,27$$

$$I_2 = 60.882,27 \bullet 0,03 = 1.826,47$$

$$\Delta_2 = a - I_2 = 31.817,73 - 1.826,47 = 29.991,26$$

$$C_2 = C_1 - \Delta_2 = 60.882,27 - 29.991,26 = 30.891,01$$

$$I_3 = 30.891,01 \bullet 0,03 = 926,73$$

$$\Delta_3 = a - I_3 = 31.817{,}73 - 926{,}73 = 30.891$$

$$C_3 = C_2 - \Delta_3 = 30.891{,}01 - 30.891 \approx 0$$

t_r	a_r	I_r	Δ_r	C_r	M_r
0	-	-	-	90.000	-
1	31.817,73	2.700	29.117,73	60.882,27	29.117,70
2	31.817,73	1.826,47	29.991,26	30.891,01	59.108,96
3	31.817,73	926,73	30.891	0	90.000

***b*) Resulta que al finalizar el primer año el Euribor varía y sube al 2,5 %. Calcular el nuevo cuadro de amortización.**

Las operaciones realizadas para el primer año del apartado anterior son las mismas. Además, sabemos que al final del primer año queda pendiente de amortizar 60.882,27 euros. Así, calculamos las nuevas anualidades del segundo y tercer año:

$$a' = 60.882{,}27 \bullet \frac{0{,}04}{1 - (1 + 0{,}04)^{-2}} = 32.279{,}54$$

Y completamos el cuadro con las siguientes operaciones:

$$I_2 = 60.882{,}27 \bullet 0{,}04 = 2.435{,}29$$

$$\Delta_2 = a - I_2 = 32.279{,}54 - 2.435{,}29 = 29.844{,}25$$

$$C_2 = C_1 - \Delta_2 = 60.882{,}27 - 29.844{,}25 = 31.038{,}02$$

$$I_3 = 31.038{,}02 \bullet 0{,}04 = 1.241{,}52$$

$$\Delta_3 = a - I_3 = 32.279{,}54 - 1.241{,}52 = 31.038{,}02$$

$$C_3 = C_2 - \Delta_3 = 31.038{,}02 - 31.038{,}02 \approx 0$$

Quedando el cuadro de amortización como sigue:

t_r	a_r	I_r	Δ_r	C_r	M_r
0	-	-	-	90.000	-
1	31.817,73	2.700	29.117,73	60.882,27	29.117,70
2	32.279,54	2.435,29	29.844,25	31.038,02	58.961,95
3	32.279,50	1.241,52	31.038,02	0	90.000

9.º Se tiene un préstamo amortizado por el sistema francés de 200.000 euros en 25 cuotas anuales. Calcular la cuota anual, el capital vivo, la cuota de amortización y el interés correspondientes al año 15 siendo el tipo de interés del 4 % anual.

$$a = 200.000 \bullet \frac{0,04}{1-(1+0,04)^{-25}} = 12.802,39$$

$$C_{15} = 200.000 \bullet \left[(1+0,04)^{15} \bullet \frac{1-(1+0,04)^{15}}{1-(1+0,04)^{-25}} \right] = 103.838,87$$

$$\Delta_{15} = (12.802,39 - 200.000 \bullet 0,04) \bullet (1+0,04)^{15-1} = 8.316,19$$

$$I_{15} = 12.802,39 - 8.316,19 = 4.486,20$$

10.º Una pareja quiere comprar una casa con una hipoteca amortizada por el sistema francés. Sus ingresos conjuntos a lo largo de un año ascienden a 30.000 euros. Su entidad bancaria se ajusta a los coeficientes legales establecidos no pudiendo ofrecer una hipoteca por encima del 80 % del valor de la vivienda en cuestión. Además, por políticas internas exige que el importe mensual de la hipoteca no sobrepase el 30 % de los ingresos mensuales de la pareja. Si el tipo de interés nominal anual es de un 2,4 % y el plazo es de 25 años, ¿cuál es el importe máximo del inmueble que la familia podría adquirir?

Los ingresos mensuales de la pareja son:

$$\frac{30.000}{12} = 2.500$$

Serán un total de 300 meses (12x25), y el tipo de interés:

$$i_{12} = \frac{0{,}024}{12} = 0{,}002$$

La cuota máxima sería el 30 % de los ingresos, es decir:

$$a = 2.500 \bullet 0{,}3 = 750$$

Así, el capital máximo del préstamo sería:

$$750 = C_0 \bullet \frac{0{,}002}{1-\left(1+0{,}002\right)^{-300}} \Rightarrow C_0 = 169.072{,}28\, euros$$

11.º Se contrata un préstamo que se amortizará por el sistema americano y cuyo capital es de 150.000 euros a tres años, al 5,4 % nominal anual mediante cuotas semestrales. Elaborar el cuadro de amortización.

$$i_6 = \frac{0{,}054}{2} = 0{,}027$$

En tres años hay seis semestres, por lo que se trata de seis periodos. Así, al ser un préstamo americano, durante los cinco primeros sólo se amortizan los intereses generados y, en el último, se amortizan los intereses y el capital total.

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = C_0 \bullet i = 150.000 \bullet 0{,}027 = 4.050$$

$$a_6 = C_0 \bullet \left(1+i\right) = 150.000 \bullet 1{,}027 = 154.050$$

Respecto a los intereses satisfechos en cada periodo, serán iguales a la cuota semestral dada la naturaleza del préstamo americano y, por esta misma razón, el capital amortizado en los primeros cinco semestres será cero.

Así, el capital pendiente de amortización será en cada semestre igual al principal, salvo en el último que se satisface íntegramente, siendo así que el capital amortizado acumulado será siempre cero salvo en el último semestre.

t_r	a_r	I_r	Δ_r	C_r	M_r
0	-	-	-	150.000	-
1	4.050	4.050	0	150.000	0
2	4.050	4.050	0	150.000	0
3	4.050	4.050	0	150.000	0
4	4.050	4.050	0	150.000	0
5	4.050	4.050	0	150.000	0
6	154.050	4.050	150.000	0	150.000

12.º Una empresa comenzó su actividad con ayuda de un préstamo amortizado por el sistema americano por valor de 450.000 euros a cinco años al 3 % nominal anual con cuotas cuatrimestrales y una comisión por cancelación anticipada del 1 %. Tras dos años otra entidad ofrece préstamos americanos con cuotas cuatrimestrales al tipo del 2,4 % con unos gastos de formalización de 3.000 euros. ¿Compensaría a la empresa cambiar de entidad?

Puesto que se tratan de trimestres en cinco años, el número de periodos es de 20.

$$i_4 = \frac{0{,}03}{4} = 0{,}0075$$

La cuota trimestral será de:

$$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots a_{19} = 450.000 \bullet 0{,}0075 = 3.375$$

El nuevo préstamo debe cubrir el capital, más la comisión por cancelación anticipada y los gastos de formalización de la nueva hipoteca:

$$C'_0 = 450.000 + 0{,}01 \bullet 450.000 + 3.000 = 457.500$$

A un nuevo tipo de interés del:

$$i_4 = \frac{0{,}024}{4} = 0{,}006$$

Por lo que la nueva cuota trimestral será de:

$$a_9 = a_{10} = a_{11} = \ldots a_{19} = 457.500 \bullet 0{,}006 = 2.745$$

Por lo que el nuevo préstamo reduce considerablemente la cuota trimestral, compensando el cambio aun cuando el capital principal haya aumentado en 7.500 euros.

13.º Se solicita un préstamo por valor de 200.000 euros amortizable mediante el sistema lineal en cuatro años con cuotas anuales al 2,5 %. Elaborar el cuadro de amortización.

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = \frac{200.000}{4} = 50.000$$

$$I_1 = C_0 \bullet i = 200.000 \bullet 0{,}025 = 5.000$$

$$a_1 = \Delta + I_1 = 50.000 + 5.000 = 55.000$$

$$C_1 = C_0 - \Delta = 200.000 - 50.000 = 150.000$$

$$I_2 = C_1 \bullet i = 150.000 \bullet 0{,}025 = 3.750$$

$$a_2 = \Delta + I_2 = 50.000 + 3.750 = 53.750$$

$$C_2 = C_1 - \Delta = 150.000 - 50.000 = 100.000$$

$$I_3 = C_2 \bullet i = 100.000 \bullet 0{,}025 = 2.500$$

$$a_3 = \Delta + I_3 = 50.000 + 2.500 = 52.500$$

$$C_3 = C_2 - \Delta = 100.000 - 50.000 = 50.000$$

$$I_4 = C_3 \bullet i = 50.000 \bullet 0{,}025 = 1.250$$

$$a_4 = \Delta + I_4 = 50.000 + 1.250 = 51.250$$

$$C_4 = C_3 - \Delta = 50.000 - 50.000 = 0$$

Con todo ello, el cuadro de amortización queda como sigue a continuación:

t_r	a_r	I_r	Δ_r	C_r	M_r
0	-	-	-	200.000	-
1	55.000	5.000	50.000	150.000	50.000
2	53.750	3.750	50.000	100.000	100.00
3	52.500	2.500	50.000	50.000	150.000
4	51.250	1.250	50.000	0	200.000

14.º Un préstamo de 20 años amortizable por el sistema lineal mediante cuotas trimestrales al un tipo de interés del 5 % anual. Se sabe que la primera cuota trimestral fue de 123.850 euros. ¿Cuál es el importe del préstamo?

$$\left(1+i_4\right)^4 = 1+0{,}05 \Rightarrow i_4 = \sqrt[4]{1+0{,}05}-1 = 0{,}01227$$

$$a_1 = I_1 + \Delta = C_0 \bullet i + \frac{C_0}{n} \Rightarrow 112.500 = C_0 \bullet \left(0{,}01227 + \frac{1}{20 \bullet 4}\right)$$

$$C_0 = \frac{123.850}{0{,}02477} = 5.000.000\, euros$$

IV

MÉTODOS DE VALORACIÓN DE INVERSIONES

4.1. Introducción

Con el estudio financiero de un proyecto empresarial se obtienen una serie de flujos de caja de ganancias y pérdidas, así como la versión inicial para poner en práctica el proyecto, a lo largo del periodo en el que se realiza la previsión, normalmente, cinco o seis años.

En este estudio en el que se analizan los recursos que se requieren para llevar a cabo la iniciativa empresarial, lo que se traduce en una inversión inicial que se financiará con parte de recursos propios (capital social) y ajenos (deudas con entidades de crédito, con otras entidades empresariales, amistades, etc) y se reflejará en un balance previsional que refleja la situación patrimonial de la empresa al comienzo de su vida.

La evolución de dicha situación patrimonial será consecuencia del estudio de mercado realizado suponiendo unas ventas y unos gastos totales concretos. Estas dos cifras es lo que, de forma general, se denominan flujos de caja. Financieramente en cualquier plan empresarial se requiere de mucho más detalle, pero no para el programa de este capítulo. Así, en cada uno de los cinco o seis años previstos se tendrá un flujo de ingresos y otro de gastos, y la resta del primero menos el segundo dará lugar al flujo neto de caja o FNC de cada año.

Conociendo todas estas cifras, el estudio de estos flujos es relevante para conocer la rentabilidad de un proyecto empresarial y facilita la comparación de varios proyectos, ayudando al potencial inversor a tomar una decisión.

Para ello se han establecido distintos métodos que se pueden clasificar en dos grandes grupos: los métodos estáticos y los dinámicos. Los primeros no tienen en cuenta los tipos de interés existentes en el tiempo que influyen en el valor real de cada flujo según el momento del tiempo en que se perciben. Así, dan el mismo valor al flujo de la inversión inicial realizada en el momento *0* que al flujo obtenido cinco años después,

aunque los tipos de interés supongan un impacto grave sobre su valor de mercado.

Los métodos dinámicos son los más realistas pues sí tienen en cuenta los tipos de interés, debiendo descontarlos a los flujos de caja obtenidos en cada periodo y, por tanto, quedando reflejada la pérdida de poder adquisitivo.

Se estudiarán en este capítulo entre los métodos estáticos: beneficio bruto o flujo neto de caja, rentabilidad bruta o flujo neto de caja por unidad monetaria invertida, rentabilidad media anual o flujo neto de caja medio anual por unidad invertida y, por último, plazo de recuperación o pay-back.

Los métodos dinámicos, por su relevancia, son el Valor Actual Neto o VAN y la Tasa Interna de Rentabilidad o TIR.

4.2. Métodos estáticos

4.2.1. Método del beneficio bruto

Este método es conocido también como flujo neto de caja. Su cálculo es muy sencillo pues consiste simplemente en restar los gastos de cada periodo a los ingresos obtenidos en el mismo, incluyendo el momento cero en el que se tiene en cuenta la inversión inicial.

A este método se le simboliza como FNC. La *i* simboliza en periodo concreto del que se esté calculando su *FNC*.

La estructura que se puede presentar para cualquier plan empresarial con sus respectivos ingresos y gastos para un periodo supuesto de cinco años será la siguiente:

Año	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Ingresos (I)	I_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5
Gastos (G)	G_0	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5

Con ello, el cálculo del FNC de cada uno de los periodos es muy sencillo, pues simplemente deben restarse los gastos de cada periodo a los ingresos, es decir:

$$FNC_0 = I_0 - G_0; FNC_1 = I_1 - G_1; FNC_2 = I_2 - G_2 \ldots; FNC_i = I_i - G_i$$

Posteriormente, para el cálculo del FNC total, se suman cada uno de los resultados:

$$FNC = FNC_0 + FNC_1 + FNC_2 + \ldots FNC_i$$

Operación que, dado que se conoce el método de cálculo de cada uno de esos flujos:

$$FNC = I_0 - G_0 + I_1 - G_1 + I_2 - G_2 + \ldots I_i - G_i$$

Es decir:

$$FNC = I_0 + I_1 + I_2 + \ldots I_i - G_0 - G_1 - G_2 - \ldots G_i$$

Lo que matemáticamente se expresa como:

$$FNC = \sum I_i - \sum G_i$$

Según este método, en el caso de que se esté comparando varios proyectos, será preferible aquél que tenga mayor FNC.

4.2.2. Método de la rentabilidad bruta

Este método es también conocido como flujo neto de caja por unidad monetaria invertida. Así, se tendrá en cuenta el cálculo anterior del flujo neto de caja pero, además, se pondrá en relación con la inversión inicial conociendo su proporción.

Con todo ello, dado que se quiere conocer el beneficio por cada unidad invertida, simplemente se realizará un cociente entre el FNC y la inversión *A*, y lo simbolizaremos con la letra *r*:

$$r = \frac{FNC}{A} = \frac{\sum I_i - \sum G_i}{A}$$

Si se están comparando varios proyectos, será preferible aquél que presente una mayor rentabilidad, es decir, aquél con el que se obtenga mayor FNC por unidad monetaria invertida.

4.2.3. Método de la rentabilidad media anual

También es conocido como flujo neto de caja medio por unidad monetaria invertida. Este método parte del anterior, tomando la rentabilidad para conocer su media anual según el número de periodos sobre los que se haya realizado la previsión financiera.

De esta forma, para su cálculo, recordando que la *n* representa al

número de periodos según los criterios adoptados en los capítulos anteriores, será:

$$r' = \frac{r}{n} = \frac{\frac{FNC}{A}}{n} = \frac{FNC}{An} = \frac{\sum I_i - \sum G_i}{An}$$

Con este criterio en la comparación de proyectos se tomará aquél cuya rentabilidad media sea mayor. En este caso debe decirse que el resultado puede ser diferente al anterior, pues aunque se tome el mismo valor de la rentabilidad, en este caso se tienen en cuenta el número de periodos.

4.2.4. Método del plazo de recuperación o pay-back estático

Según este método en el caso de comparación de proyectos se tomará aquél cuyo plazo de recuperación sea inferior.

Este sistema consiste en tomar la inversión inicial *A* e ir sumándole los distintos FNC de cada año comenzando por el primero hasta que la inversión quede completamente compensada y dé *0*.

En esta situación, es posible que la inversión inicial se recupere justo al finalizar un plazo concreto, dando como resultado que el plazo de recuperación será exactamente de, por ejemplo, dos años. Pero la probabilidad de que esto ocurra es muy pequeña. Lo más común es que al sumar un FNC de un año a la inversión *A* dé como resultado más de *0*, lo que indica que se ha recuperado a lo largo de ese último periodo.

Podrían calcularse con exactitud el número de meses que se requieren pero no es una gran aportación, ya que el FNC se obtiene a lo largo de todo el año y se requerirían de datos mensuales exactos para conocer los FNC de periodos inferiores.

4.3. Métodos dinámicos

4.3.1. Valor Actual Neto o VAN

Este concepto no es la primera vez que se menciona en este libro. Anteriormente, al introducir el concepto de capitalización y descuento se hizo mención de la pérdida de valor del dinero con el tiempo que se refleja en el tipo de interés o de descuento, según el caso.

En este método el concepto que se utilizará es el de la tasa de actualización, y también se tendrán en cuenta los Flujos de Caja Netos del primer método estático mencionado. La diferencia radica en que con esta

metodología se dinamiza dicho método al calcular el valor actual de cada uno de los flujos en función de la tasa de actualización aplicable en cada periodo que se simboliza como *k*, así como del año en que se percibe el flujo previsto.

Recuérdese aquí el concepto de capitalización compuesta y el descuento racional de los epígrafes 1.2.2. y 1.2.7.

Con todo ello, el sistema de esta operación consiste en conocer el valor de cada uno de los FNC en el momento actual para proceder a su suma.

La operación del VAN será la siguiente:

$$VAN = -A + \frac{FNC_1}{(1+k)} + \frac{FNC_2}{(1+k)^2} + \frac{FNC_3}{(1+k)^3} + \ldots \frac{FNC_n}{(1+k)^n}$$

Con ello se obtendrá un valor en el momento actual que representará el beneficio que se obtendrá a lo largo del periodo previsto en el plan financiero. No obstante, debe resaltarse que el resultado dependerá de la tasa de actualización escogida *k*, pues a mayor tasa menor VAN.

Este método permite la comparación de varios proyectos, siendo más interesante aquél que presente un mayor VAN a una misma tasa de actualización.

4.3.2. Tasa Interna de Rentabilidad o TIR

La Tasa Interna de Rentabilidad es aquella tasa de actualización que hace que el VAN sea igual a cero. Así, su cálculo es muy sencillo pues a partir de la fórmula anterior del VAN, el resultado será conocido, pues se iguala a cero, y la incógnita será la tasa de actualización que, según este método, se simbolizará como *r*. Es decir:

$$VAN = 0 = -A + \frac{FNC_1}{(1+r)} + \frac{FNC_2}{(1+r)^2} + \frac{FNC_3}{(1+r)^3} + \ldots \frac{FNC_n}{(1+r)^n}$$

Al despejar la tasa de rentabilidad *r*, se obtiene la TIR:

$$TIR = r$$

En este punto suele surgir temor en los alumnos al observar que para conocer el valor de la *r* se requiere resolver una ecuación de grado *n*, algo que para proyectos con una previsión de varios años resulta inviable. Que

no se preocupe el alumno porque este tipo de operaciones sólo se requerirán, por lo general, cuando se puedan utilizar calculadoras financieras.

También puede darse el caso de que el profesor exija calcular *r* por el método de aproximación, en cuyo caso se tendrán que seguir los siguientes pasos:

1.º Observa si al calcular el VAN a una tasa de actualización concreta da positivo o negativo. En el primer caso supondría que la *r* debe ser mayor al utilizado en el cálculo del VAN, y viceversa.

2.º Identificada la tasa de actualización y el valor del VAN dado inicialmente, se debe ir comprobando el valor del VAN según los resultados que vayan dando hasta que dé *0* o aproximado, teniendo en cuenta en todo momento que si el VAN es positivo debe incrementarse *r*, y si es negativo debe reducirse.

4.4. Ejercicios resueltos

Como en todos los temas, a continuación te propongo una serie de ejercicios resueltos con los que podrás poner en práctica los conocimientos adquiridos.

1.º Se ofrecen a un inversor tres proyectos diferentes con los siguientes ingresos y gastos en miles de euros:

Proy.		Año 1		Año 2		Año 3		Año 4		Año 5		Año 6	
		I	G	I	G	I	G	I	G	I	G	I	G
A	-20	10	8	12	6	14	5	15	2				
B	-15	9	2	4	1	1	0	2	0	2	0	2	0
C	-12	10	5	10	1	3	2						

Comparar todos los proyectos en función de los distintos criterios estáticos que hemos estudiado.

El primer paso a realizar para reducir los datos es calcular los flujos netos de caja restando a los ingresos los gastos, es decir:

$$FNC_n = I_n - G_n$$

Quedando la siguiente tabla:

Proy.		Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5	Año 6
		FNC	FNC	FNC	FNC	FNC	FNC
A	-20	2	6	9	13		
B	-15	7	3	1	2	2	2
C	-12	5	9	1			

Así, por el método de flujo neto de caja, tendremos los siguientes resultados:

$$FNC_A = -20 + 2 + 6 + 9 + 13 = 10$$

$$FNC_B = -15 + 7 + 3 + 1 + 2 + 2 + 2 = 2$$

$$FNC_c = -12 + 5 + 9 + 1 = 3$$

Según este método, el orden de prioridad sería el A, C y B.

A continuación, utilizaremos el método de la rentabilidad bruta o RB:

$$RB_A = \frac{FNC_A}{I_A} = \frac{10}{20} = 0{,}5$$

$$RB_B = \frac{FNC_B}{I_B} = \frac{2}{15} = 0{,}13$$

$$RB_C = \frac{FNC_C}{I_C} = \frac{3}{12} = 0{,}25$$

El orden de prioridad de los proyectos según este método es A, C y B.

Según el método de la rentabilidad media por periodos o RM, en este caso, por cada año, tendríamos:

$$RM_A = \frac{RB_A}{t_A} = \frac{0{,}5}{4} = 0{,}125$$

$$RM_B = \frac{RB_B}{t_B} = \frac{0{,}13}{6} = 0{,}0217$$

$$RM_C = \frac{RB_C}{t_C} = \frac{0{,}25}{3} = 0{,}083$$

Así, el orden de prioridad según este método es A, C y B.

Estudiemos ahora los proyectos según el método del plazo de recuperación, que se calcula mediante la suma acumulada de los flujos de caja anuales hasta la recuperación total de la inversión:

Proyecto A

Año 1	-20+2=-18	<0
Año 2	-20+2+6=-12	<0
Año 3	-20+2+6+9=-3	<0
Año 4	-20+2+6+9+13=10	>0

Por lo que la inversión se recupera a lo largo del 4.º año.

Proyecto B

Año 1	-15+7=-8	<0
Año 2	-15+7+3=-5	<0
Año 3	-15+7+3+1=-4	<0
Año 4	-15+7+3+1+2=-2	<0
Año 5	-15+7+3+1+2+2=0	

Por lo que, en este caso, la inversión se recupera al final del 5.º año.

Proyecto C

Año 1	-12+5=-7	<0
Año 2	-12+5+9=2	>0

Por lo que la inversión se recupera a lo largo del 2.º año.

Con todo ello, según este método, el orden de prioridad entre los tres proyectos es C, A y B.

2.º Te ofrecen invertir en uno de los tres siguientes proyectos:

Proyecto A

Año	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
Ingresos	**0**	**5**	**6**	**7**	**8**
Gastos	**10**	**4**	**3**	**2**	**1**
FNC	**-10**	**1**	**3**	**5**	**7**

Proyecto B

Año	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Ing.	**0**	**3**	**2**	**1**	**1**	**1**	**1**
Gas.	**5**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
FNC	**-5**	**3**	**2**	**1**	**1**	**1**	**1**

Proyecto C

Año	**0**	**1**	**2**	**3**
Ingresos	**0**	**5**	**6**	**3**
Gastos	**8**	**2**	**1**	**2**
FNC	**-8**	**3**	**5**	**1**

Según los métodos VAN y TIR, ¿cuál es el orden de prioridad de inversión de estos tres proyectos suponiendo un tipo de interés del 2 % anual?

$$VAN_A = -10 + \frac{1}{1{,}02} + \frac{3}{1{,}02^2} + \frac{5}{1{,}02^3} + \frac{7}{1{,}02^4} = 5{,}04$$

$$VAN_B = -5 + \frac{3}{1{,}02} + \frac{2}{1{,}02^2} + \frac{1}{1{,}02^3} + \frac{1}{1{,}02^4} + \frac{1}{1{,}02^5} + \frac{1}{1{,}02^6} = 3{,}52$$

$$VAN_C = -8 + \frac{3}{1{,}02} + \frac{5}{1{,}02^2} + \frac{1}{1{,}02^3} = 0{,}69$$

Así, el orden de prioridad según el criterio VAN será A, B y C.

Para el cálculo de la TIR, se puede hacer uso de una calculadora financiera o mediante el sistema de proyecciones o prueba y error. En cualquier caso, los resultados aproximados son:

$$0 = -10 + \frac{1}{1+r} + \frac{3}{(1+r)^2} + \frac{5}{(1+r)^3} + \frac{7}{(1+r)^4} \Rightarrow r_A = 16{,}62\,\%$$

$$0 = -5 + \frac{3}{1+r} + \frac{2}{(1+r)^2} + \frac{1}{(1+r)^3} + \frac{1}{(1+r)^4} + \frac{1}{(1+r)^5} + \frac{1}{(1+r)^6} \Rightarrow r = 19{,}33\,\%$$

$$0 = -8 + \frac{3}{1+r} + \frac{5}{(1+r)^2} + \frac{1}{(1+r)^3} \Rightarrow r = 6{,}90\,\%$$

Así, el orden de prioridad será B, A y C.